n.V.

2,6

S. F. Lacroix

Anleitung

zur ebenen und sphärischen

Trigonometrie

und zur

Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

Uebersetzt und mit erläuternden Anmerkungen versehen

von

Dr. Ludwig Ideler,

Professor an der Universität zu Berlin.

Mit sechs Kupfertafeln.

Zweite verbesserte Ausgabe.

Berlin,

Verlag von Duncker und Humblot.

1837.

072845309

Staatl. Bibliothek Passau

Vorbericht des Uebersetzers.

Die im Jahr 1805 erschienene deutsche Uebersetzung von Hrn. Lacroix *Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'Algèbre à la Géometrie* hat sich ihrer Mängel ungeachtet bei dem anerkannten Werthe des Originals vergriffen. Wegen einer neuen Ausgabe von den Herren Verlegern um meine Meinung befragt, überzeugte ich mich bald, daß, schon wegen der bedeutenden Verbesserungen und Erweiterungen, die das französische Werk in seinen fortgesetzten Auflagen erfahren hat, eine ganz neue Uebersetzung Bedürfniß sei, und eine solche liefere ich hiermit. Ich habe sie nach der sechsten Ausgabe der Urschrift veranstaltet, und erst als der Druck seiner Beendigung nahe war, erfuhr ich, daß so eben eine *septième édition revue, corrigée et augmentée* erschienen sei. Glücklicherweise stimmt diese neue Auflage mit der zunächst vorhergehenden Zeile für Zeile überein, indem das *corrigée* nur auf einen correctern Druck und das *augmentée* nur auf ein paar kleine Anmerkungen unter dem Text und auf vier größere am Schluß geht. Ich habe unter der Ueberschrift: Nachträge am Ende der Uebersetzung alles zusammengestellt, was nach sorgfältiger Vergleichung beider Ausgaben die neue nur irgend eigenthümliches enthält.

Durch die Vorlesungen, die ich über dieses schätzbare Lehrbuch bei der hiesigen Universität gehalten habe, vertraut mit demselben geworden, schien es mir hin und wieder für das erste Studium der darin behandelten Gegenstände etwas zu schwierig abgefaßt zu sein. Um es also auch Denen zugänglich zu machen, die es, versteht sich mit der nöthigen Kenntniß der Algebra und Elementargeometrie ausgerüstet, mit eigenem Fleiße durcharbeiten wollen, habe ich eine Reihe Anmerkungen unter den Text gesetzt, die ich aus keinem andern Gesichtspunkt, als den hier bezeichneten zu betrachten bitte. Es würde leicht gewesen sein, ihnen mehr Ausführlichkeit und ein gelehrteres Ansehn zu geben; allein ich hielt es für unbescheiden, dem Hrn. Verfasser, der überall, wenn es seinem Zwecke angemessen gewesen wäre, weit mehr hätte geben können, vorgreifen zu wollen.

Das Hauptverdienst, das ich mir erwerben konnte, bestand in der Correctheit der Uebersetzung und des Drucks, und ich kann versichern, daß ich mir in dieser Hinsicht viel Mühe gegeben habe, die der billige Beurtheiler hoffentlich nicht verkennen wird.

Berlin, im April 1822.

Vorbericht zur neuen Ausgabe.

Die achte, meines Wissens bis jetzt neuste Auflage der Urschrift dieses sehr geschätzten Lehrbuchs ist 1827 erschienen. Sie unterscheidet sich von der vorigen nur durch ein paar kleine Anmerkungen, die der Verfasser unter den unverändert gebliebenen Text gesetzt, und durch eine längere, die er den vier andern am Schlusse beigesellt hat. Mit ihr ist die vorliegende neue Ausgabe meiner Uebersetzung genau verglichen worden. Von meinen Anmerkungen, die dem Anfänger das Selbststudium des Werks zu erleichtern bestimmt sind, habe ich einige weggelassen, die mir bei näherer Ansicht zu unerheblich erschienen; an den übrigen ist nichts wesentliches geändert worden. Neues habe ich nicht hinzugefügt, aus Besorgniß, noch immer

zu viel gegeben zu haben. Die Hülfe, die mir mein Sohn, Dr. Julius Ludwig Ideler, Privatdocent an der hiesigen Universität, sowohl bei der Revision des Textes als bei der Correctur geleistet hat, darf ich nicht unerwähnt lassen.

Berlin, im Oktober 1836.

L. Ideler.

Inhalt.

Erstes Kapitel.

Von der ebenen Trigonometrie.

Seite

In einem geradlinigen Dreieck betrachtet man sechs Stücke, drei Seiten und drei Winkel. Vermittelst dreier dieser sechs Stücke bestimmt man immer ein Dreieck, wenn sich nur eine Seite darunter befindet 1

Wenn man eine Reihe für alle mögliche Winkel berechneter Dreiecke hätte, so würde sich in dieser Reihe nothwendigerweise eins finden, welches einem gegebenen ähnlich wäre..... 2

Der Sinus eines Bogens ist die von dem einen Endpunkt desselben auf den zu dem andern Endpunkt gezogenen Halbmesser herabgelassene Senkrechte; der Cosinus ist der zwischen dem Sinus und dem Mittelpunkt des Kreises liegende Theil des Halbmessers; der Sinus versus ist der Theil des Halbmessers, der zwischen dem Sinus und dem Bogen liegt; die Tangente ist die Senkrechte, die man in dem einen Endpunkt des Bogens errichtet und durch den zum andern Endpunkt gehenden verlängerten Halbmesser begränzt; dieser verlängerte Halbmesser heißt die Secante. Man nennt Complement eines Bogens oder Winkels das, was zu diesem Bogen oder Winkel hinzugesetzt oder davon hinweggenommen werden muß, damit daraus der vierte Theil des Umkreises oder ein rechter Winkel entstehe .... 4 — 5

Die Cosinus, Cotangenten und Cosecanten sind die Sinus, Tangenten und Secanten der Complemente 6

Der Cosinus und der Halbmesser haben eben dasselbe Verhältniß zu einander wie der Sinus und die Tangente, oder wie der Halbmesser und die Secante .... eb.

Der Halbmesser ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Tangente und Cotangente, oder zwischen der Secante und dem Cosinus 7

Das Quadrat des Halbmessers ist gleich der Summe der Quadrate des Sinus und des Cosinus 8

Der Sinus der Summe oder des Unterschiedes zweier Bogen ist gleich dem Sinus des ersten multiplicirt mit dem Cosinus des zweiten, plus oder minus dem Sinus des zweiten multiplicirt mit dem Cosinus des ersten, das Ganze durch den Halbmesser dividirt .... eb.

Der Cosinus der Summe oder des Unterschiedes zweier Bogen ist gleich dem Product ihrer Cosinus minus oder plus dem Product ihrer Sinus, das Ganze durch den Halbmesser dividirt .... eb.

Aus diesen Ausdrücken leitet man den Sinus und Cosinus eines Bogens her, welcher das Vielfache eines andern ist..... 10

Wenn des Sinus eines Bogens gegeben ist, so findet man den Sinus seiner Hälfte 11

Man nennt Supplement eines Bogens oder eines Winkels das, was man zu ihm hinzufügen oder von ihm wegnehmen muß, um ihn dem halben Umkreise oder zwei Rechten gleich zu machen 14

Das Supplement eines Bogens hat gleichen Sinus mit diesem Bogen .... eb.

Der Sinus eines Bogens ist die Hälfte der Sehne des doppelten Bogens .... eb.

Nicht die absoluten Werthe der Sinus sind es, die man berechnet, sondern ihr Verhältniß zum Halbmesser .... eb.

Die Länge eines Bogens ist größer, als die seines Sinus, aber kleiner, als die seiner Tangente .... eb.

Anm. Die Linien, welche überall nach gleicher Richtung convex sind, werden um so länger, je weiter sie sich von der Geraden entfernen 15

Das Verhältniß des Sinus zur Tangente hat die Einheit zur Gränze .... eb.

Wie man auf eine sehr genäherte Weise die Länge des Bogens finden könne, der einem sehr kleinen Sinus zukommt....... 16

Anm. Reihe, welche die Tangente durch den Sinus ausdrückt eb.
Der Sinus des Quadranten ist der Halbmesser und der Sinus des dritten Theils dieses Bogens die Hälfte des Halbmessers eb.
Von der Eintheilung des Kreises 17
Der Sinus der Hälfte des Quadranten ist $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 19
Von der Construction der trigonometrischen Tafeln .... eb.
Von ihrem Gebrauch 22
Die Sinus und die Cosinus ändern ihr Zeichen, wenn sie von einem Halbkreise in den andern übergehen 26
Die Zeichen der Tangenten werden nach ihrer Relation zu den Sinus und Cosinus bestimmt 28
Das Zeichen des Sinus eines negativen Bogens ist dem des eben so großen positiven Bogens entgegengesetzt; sein Cosinus hat dasselbe Zeichen 29
Untersuchung verschiedener Relationen der trigonometrischen Linien 30
Das Verhältniß der Summe zur Differenz der Sinus zweier Bogen ist dem der Tangenten der halben Summe zur halben Differenz eben dieser Bogen gleich 33
Tafel der gebräuchlichsten trigonometrischen Formeln 36
In jedem rechtwinkligen Dreieck verhält sich der Halbmesser zum Sinus eines der spitzen Winkel, wie die Hypotenuse zu der diesem Winkel gegenüberstehenden Seite 37
Der Halbmesser verhält sich zur Tangente eines der spitzen Winkel, wie die an diesem Winkel liegende Kathete zur gegenüberstehenden .... eb.
Wie man irgend eine Seite eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet, wenn man die beiden andern kennt 38
In jedem Dreieck verhalten sich die Sinus zweier Winkel eben so zu einander, wie die diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten 41
Beziehung, welche zwischen den Seiten eines Dreiecks und den Sinus seiner Winkel statt findet 43
Vermittelst der eben gedachten Proportion löst man jedes Dreieck auf, mit Ausnahme der Fälle, wo man zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel oder die drei Seiten kennt 44
Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks verhält sich zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe der die-

sen Seiten gegenüberstehenden Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz 46
Wie man unmittelbar die dritte Seite findet .... eb.
Der Sinus der Hälfte eines Winkels ist gleich der Quadratwurzel aus dem Product der Unterschiede zwischen der halben Summe der drei Seiten des Dreiecks und jeder der beiden den Winkel einschließenden Seiten, dividirt durch das Product dieser Seiten, wobei der Halbmesser als Einheit genommen wird 49
Beispiele zur Auflösung der rechtwinkligen und schiefwinkligen Dreiecke 50
Anwendung der Trigonometrie auf die Kunst ein Terrain in Grund zu legen, oder auf die Bestimmung von Punkten, welche entweder in einer Ebene oder im Raum liegen, mit Bezug auf eine gegebene Linie, die entweder horizontal oder gegen den Horizont geneigt ist und Basis genannt wird 54
Anm. Wie man einen Winkel messen kann .... eb.
Was man unter der Reduction der Winkel auf die Horizontalebene versteht 58
Bestimmung eines Punkts vermittelst der Winkel, die an ihm von Linien gebildet werden, welche zu drei gegebenen Punkten derselben Ebene führen 58
Anmerkung über das Nivelliren 61
Der Unterschied zwischen den Wasserflächen zweier Punkte ist die Linie, um welche der eine in vertikaler Richtung höher oder tiefer als der andere liegt .... eb.
Unterschied der scheinbaren und wahren Horizontallinie 62
Von der Auflösung der Dreiecke durch Reihen .... eb.

Zweites Kapitel.

Von der sphärischen Trigonometrie.

Ein sphärisches Dreieck wird von drei größten Kreisen auf der Kugelfläche gebildet, von denen je zwei einander schneiden 64
Construction, auf welcher die ganze sphärische Trigonometrie beruht 66
Gleichungen, welche alle Beziehungen in sich begreifen, in de-

nen die sechs Stücke eines sphärischen Dreiecks zu einander stehn können 67
Anm. Ausdruck des Volumens eines Tetraeders durch die drei Kanten, welche zu einer Ecke gehören, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel 69
Vorbereitung der gedachten Gleichungen, um sie unmittelbar auf die Auflösung der sphärischen Dreiecke anzuwenden..... eb.
Was man unter dem Polardreieck versteht 71
Anm. Eine andere Form, unter welcher man die Fundamentalgleichungen darstellt .... eb.
Anm. Gränzen der Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks .... eb.
Vereinfachung der Formeln für den Fall, wo das Dreieck rechtwinklig ist 76
Umformung der Fundamentalgleichungen, um bequem die logarithmische Rechnung auf sie anwenden zu können 77
Formeln, welche alle Combinationen der Winkel und Seiten eines sphärischen Dreiecks enthalten 83
Die Neperschen Formeln 84
Kurze Wiederholung der zur Auflösung der sphärischen Dreiecke nöthigen Formeln 86
Betrachtung über die verschiedenen Bedingungen, welchen Genüge geschehen muß, wenn dieselben Data einem oder zwei sphärischen Dreiecken zukommen sollen 89
Reduction der Winkel auf die Horizontalebene vermittelst der sphärischen Trigonometrie 90

Drittes Kapitel.

Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

Allgemeiner Begriff von der Anwendung der Algebra auf die Geometrie 93
Wie die Algebra dazu diene, die Lehrsätze der Geometrie zu combiniren und die Aufgaben, welche sich auf die ausgedehnten Größen beziehen, in Gleichungen zu bringen und aufzulösen 94
Der Flächeninhalt eines Dreiecks wird ausgedrückt durch die Quadratwurzel aus dem Product der halben Summe der drei Seiten in die Differenzen dieser halben Summe und jeder der Seiten 97

Ausdruck des Volumens einer abgekürzten Pyramide oder eines abgekürzten senkrechten Kegels mit parallelen Grundflächen 98
Aufgaben vom ersten und zweiten Grade, in welchen die Linien nicht als Zahlen, sondern an und für sich betrachtet werden 99
Was man die Construction algebraischer Ausdrücke nennt 102
Wie man die der homogenen Größen bewirkt, welche sich auf Linien beziehen .... eb.
Construction der Quadratwurzeln 105
Wie man mit einer Größe, die nicht homogen ist, zu verfahren hat 107
Construction der Wurzeln der Gleichungen vom zweiten Grade mit einer einzigen Unbekannten 108
Graphische Auflösung dieser Gleichungen 110
Von der Bedeutung der Zeichen + und — mit Bezug auf die Linien, und von ihrem Gebrauch bei Auflösung der Aufgaben 112
So oft von Abständen die Rede ist, die sich auf einen festen Punkt beziehn und auf einerlei oder parallelen Linien gerechnet werden, müssen die mit dem Zeichen — behafteten eine den mit dem Zeichen + behafteten entgegengesetzte Lage annehmen 115
Bemerkung über die Zeichen der Secante und Anm. über denselben Gegenstand 116
Vollständige Analysis der Aufgabe, welche verlangt, durch einen zwischen den Schenkeln eines rechten Winkels gegebenen Punkt eine gerade Linie dergestalt zu legen, daß der zwischen den Schenkeln dieses Winkels liegende Theil derselben von einer gegebenen Größe sei 117
Die Newtonische Auflösung dieser Aufgabe für den Fall, wo der Punkt, durch welchen die Linie gelegt werden soll, von beiden Schenkeln des rechten Winkels gleichen Abstand hat 124
Construction der algebraischen Ausdrücke, welche zu Flächen und Körpern gehören 126
Grundbegriff von der Analysis des Cartesius, durch welche man die Curven vermittelst Gleichungen zwischen zwei unbestimmten Größen darstellt 128
Die Gleichung der Geraden 129
— — des Kreises 131

Was man Coordinaten, ihre Axen und ihren Anfangspunkt nennt 133
Wie man die vier Winkel, welche die Axen der Coordinaten bilden, vermittelst der Zeichen + und — unterscheidet .... eb.
Was man den Ort einer Gleichung nennt, und wie man den irgend einer Curve finden kann 134
Die allgemeine Gleichung vom ersten Grade mit zwei Unbestimmten gehört einer geraden Linie an 135
Zur Bestimmung dieser Linie werden zwei Bedingungen erfordert 138
Gleichung einer Geraden, welche durch zwei gegebene Punkte geht .... eb.
Ausdruck für den Abstand dieser beiden Punkte 139
Gleichung einer Geraden, welche, durch einen gegebenen Punkt gehend, einer gegebenen Geraden parallel ist 140
Gleichung der von einem gegebenen Punkt auf eine gegebene Linie herabgelassenen Senkrechten .... eb.
Anm. über das Zeichen, welches der Tangente des Winkels zukommt, den diese Senkrechte mit der Axe der x bildet.. 141
Um den Durchschnittspunkt zweier sich schneidenden Geraden zu finden, muß man annehmen, daß die Coordinaten der einen denen der andern gleich sind 142
Ausdruck für die Länge der von einem gegebenen Punkt auf eine gegebene Gerade herabgelassenen Senkrechten .... eb.
Ausdrücke für den Sinus, den Cosinus und die Tangente des Winkels, den zwei Gerade mit einander bilden 143
Allgemeine Gleichung des Kreises, bei der man den Anfangspunkt nach Belieben annimmt 145
Wie man den Kreis bestimmt, welcher durch drei gegebene Punkte geht 146
Einfachste Gleichungen des Kreises 147
Aufgaben, welche sich auf gerade Linien beziehn und die der §§. 75 und 78 in sich begreifen 148
Gleichungen, welche die Beziehung ausdrücken, die zwischen den Winkeln und Seiten eines Dreiecks statt finden 152
Ausdruck für den Flächeninhalt eines Dreiecks vermittelst der Coordinaten der Scheitel seiner Winkel 156
Die Fläche eines Dreiecks hängt nicht von seiner Lage in Rücksicht der Axen der Coordinaten ab; man findet auch

wirklich einen andern Ausdruck, welcher nur von den Seiten abhängt ... 157
Gleichung, welche die Relation zwischen den Seiten eines Vierecks und seinen Diagonalen angiebt ... 158
Ausdruck für den Halbmesser des um ein Dreieck beschriebenen Kreises ... 160
Ausdruck für den Halbmesser des in ein Dreieck eingeschriebenen Kreises ... 162
Wenn man von einem innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks genommenen Punkt auf jede Seite eine Senkrechte fällt, so ist die Summe dieser drei Linien seiner Höhe gleich ... eb.
Wenn man die Gleichungen der geraden Linie und des Kreises combinirt, so bestimmt man dadurch die aus dem Durchschnitt dieser beiden Linien entspringenden Eigenschaften ... 164
Anwendung der durch diese Combination sich ergebenden Gleichung auf die Untersuchung verschiedener Sätze der Geometrie ... 165
Analytische Bestimmung der an einen Kreis von einem außerhalb desselben befindlichen Punkt gelegten Tangenten, so wie auch der durch einen Punkt des Umkreises geführten ... 167
Die Lage einer durch einen Punkt gelegten geraden Linie von der Beschaffenheit zu finden, daß der im Kreise enthaltene Theil derselben von einer gegebenen Größe sei ... 169
Allgemeine Gleichung der Curven vom zweiten Grade ... 172
Ihre Durchmesser ... 174
Vereinfachung der Gleichung, wenn man sie auf diese Linien bezieht ... eb.
Untersuchung der Werthe, welche der allgemeine Ausdruck der Ordinaten in dem Fall annehmen kann, wo m positiv ist ... 176
Was man unter Mittelpunkt der Curve versteht ... 177
Construction und Form der Curve für diesen Fall ... 178
Sie reducirt sich auf einen Punkt, ehe sie imaginär wird ... 179
Untersuchung des Falls, wo m negativ ist ... 181
Die Curve hat auch in diesem Fall einen Mittelpunkt ... eb.
Construction und Form der Curve ... 182
Wann sich die Curve auf zwei Gerade reducirt, welche ihre Asymptoten sind ... 184

Untersuchung des Falls, wo m = 0 ist 187
Gestalt und Construction der Curve .... eb.
Zusammenstellung der Gleichungen der drei Curven, welche im Vorhergehenden erkannt worden sind; die erste wird Ellipse, die zweite Hyperbel, und die dritte Parabel genannt 188
Untersuchung des Falls, wo die Quadrate der Coordinaten beide in der Gleichung fehlen 189
Was man conjugirte Durchmesser nennt 192
Umformung der Coordinaten einer Curve 193
Anmerkung über den Gebrauch der Winkel in diesen Formeln 197
Anwendung dieser Umformung auf die allgemeine Gleichung des zweiten Grades, um sie auf die Axen der durch sie ausgedrückten Curven zurückzuführen 200
Erste umgeformte 203
Bestimmung ihrer Coefficienten und der Fälle, welche sie begreift 204
Zweite umgeformte, welche den andern Fall der allgemeinen Gleichung in sich begreift 206
Diese beiden umgeformten geben nur die drei Formen, welche schon S 188 angemerkt sind; die erste begreift die Ellipse, von der der Kreis ein besonderer Fall ist, und die Hyperbel, beide auf ihre Axen bezogen 208
Was man unter der zweiten Axe und der Zwerchaxe der Hyperbel versteht 210
Was eine gleichseitige Hyperbel ist 211
Die zweite umgeformte gehört der Parabel an .... eb.
Gleichung mit drei Gliedern, in welcher die auf ihre Axe bezogene Parabel gleichfalls begriffen ist 212
Die Ellipse und die Hyperbel haben jede zwei Scheitel .... eb.
Die Parabel hat nur einen Scheitel und keinen Mittelpunkt .... eb.
Anwendung der vorhergehenden Umformungen, durch die man erkennt, daß die Gleichung des zweiten Grades, worin die Quadrate der beiden Coordinaten fehlen, einer Hyperbel angehört, deren Axe der Größe und Lage nach bestimmt werden 213
Anmerk. über die Gleichung der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten, hergeleitet aus der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades 214

Die Gleichung einer Curve von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn man von irgend einem Punkte derselben nach zwei festen Punkten, den Brennpunkten, gerade Linien zieht, die Summe dieser Linien, welche man Leitstrahlen nennt, immer einer gegebenen Linie gleich sei .... eb.

Diese Curve ist die Ellipse; ihre Construction durch Punkte und mechanisches Mittel, sie durch eine stetige Bewegung zu beschreiben 216

Was man die Excentricität nennt 217

Eine andere Construction der Ellipse durch Punkte .... eb.

Anm. Algebraische Ausdrücke der Coordinaten in dieser Construction 218

Die Gleichung einer Curve zu finden, in welcher der Unterschied der Leitstrahlen einer gegebenen Linie gleich sei 219

Diese Curve ist die Hyperbel; ihre Construction durch Punkte und mechanisches Mittel sie zu beschreiben .... eb.

Die Gleichung einer Curve zu finden, in welcher jeder Punkt von einem gegebenen festen Punkt, dem Brennpunkt, eben so weit entfernt sei, als von einer der Lage nach gegebenen Geraden 221

Diese Curve ist die Parabel; ihre Construction durch Punkte und ihre Beschreibung durch eine stetige Bewegung .... eb.

Allgemeine Aufgabe, welche auf die drei Curven des zweiten Grades führt, mit Bezug auf die Leitlinie 222

Gleichungen der Curven des zweiten Grades mit Bezug auf den Parameter 224

In der Ellipse und der Hyperbel ist der Parameter die dritte Proportionallinie zu den beiden Axen, und zugleich die doppelte durch den Brennpunkt gehende Ordinate 227

In der Ellipse und Hyperbel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten eben so zu einander, wie die Producte aus den correspondirenden Abscissen, und in der Parabel wie die Abscissen selbst 228

Anwendung der Umformung der Coordinaten auf die Untersuchung der conjugirten Durchmesser 229

Wenn irgend ein Durchmesser gegeben ist, die Lage des zugeordneten zu finden 234

Die Summe der Quadrate der halben conjugirten Durchmesser in der Ellipse und ihre Differenz in der Hyperbel

ist die Summe der Quadrate der halben Axen oder ihrer Differenz gleich 239
Die über den conjugirten Durchmessern der Ellipse sowohl als der Hyperbel beschriebenen Parallelogramme sind alle dem Rechteck aus den beiden Axen gleich 241
Gleichungen, vermittelst deren man die halben Axen finden kann, wenn man die halben conjugirten Durchmesser und den von ihnen eingeschlossenen Winkel kennt .... eb.
In jeder Ellipse giebt es zwei einander gleiche conjugirte Durchmesser 242
Jedes System von Linien, welches geeignet ist, die verschiedenen Punkte einer Curve zu bestimmen, kann eine charakteristische Gleichung für sie geben 243
Beispiel von der Ellipse entlehnt .... eb.
Polargleichungen dieser Curve, der Hyperbel und Parabel. 245
Polargleichung, welche alle drei Curven begreift .... eb.
Beweis der Identität der Curven des zweiten Grades mit den in einem Kegel durch eine Ebene gemachten Schnitten, und was man den antiparallelen Schnitt nennt 246
Bestimmung der geraden Linien, welche die Curven vom zweiten Grade schneiden oder berühren 253
Ausdruck für die Tangente des Winkels, welchen eine gerade Linie mit der Axe der Abscissen bilden muß, um eine Curve vom zweiten Grade zu berühren 257
Ausdrücke für die Subtangente in jeder der Curven vom zweiten Grade .... eb.
In der Parabel ist die Subtangente die doppelte Abscisse 258
Construction der Tangente an der Ellipse 259
Ausdrücke für die Normalen und Subnormalen für alle Curven 260
Ausdrücke für die Subtangenten, Tangenten, Subnormalen und Normalen der Curven vom zweiten Grade .... eb.
Synthetische Bestimmung der Tangenten der Curven vom zweiten Grade 261
Relation der Winkel, welche die Tangente mit den beiden Leitstrahlen in der Ellipse und Hyperbel, und mit dem Leitstrahl und einer der Axe parallel gelegten Geraden in der Parabel bildet 262
Jeder Zweig der Hyperbel bleibt immer zwischen den Schenkeln eines gewissen Winkels eingeschlossen, ohne sie jemals erreichen zu können 264

Gleichung der Hyperbel mit Bezug auf ihre Asymptoten..... 266
Was man die Potenz der Hyperbel nennt.................. 268
Wenn man durch irgend einen Punkt der Hyperbel eine gerade Linie zieht, so sind die zwischen der Hyperbel und den Asymptoten befindlichen Theile dieser Geraden einander gleich... eb.
Construction der Hyperbel durch Punkte, wenn man die Asymptoten und einen Punkt der Hyperbel hat.......... 269
Von den conjugirten Hyperbeln.......................... 270
Von der Anzahl der Punkte, welche zur Bestimmung der Art, Größe und Lage einer Curve vom zweiten Grade erforderlich sind.. eb.
Von der Construction der Gleichungen der höheren Grade vermittelst der Curven................................. 272
Anwendung auf den vierten Grad......................... 273
Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels................ 275
— von der Dreitheilung des Winkels...................... 277
Allgemeine Methode, die Gleichungen eines jeden Grades zu construiren, welche die Principien enthält, auf denen die Auflösung der numerischen Gleichungen beruht........... 280
Anmerkung. Ein gebrochener Ausdruck kann sein Zeichen ändern, eben so gut wenn er durchs Unendliche, als wenn er durch Null geht..................................... 283
Wie die graphische Construction die numerische Auflösung der Gleichungen erhellen und erleichtern kann............. 284

Anhang

die ersten Gründe der Anwendung der Algebra auf die krummen Flächen und auf die Curven von doppelter Krümmung enthaltend.

Gleichung der Ebene und der geraden Linie. 286
Von den Coordinaten eines Punkts im Raum................ eb.
Allgemeine Gleichung der Ebene......................... 288
Bezeichnung der von den coordinirten Ebenen gebildeten acht körperlichen Winkel vermittelst der Zeichen + und —..... 291
Gleichungen der geraden Linie.......................... 292
Gleichung der Ebene, welche durch drei gegebene Punkte geht 293

Woran man erkennt, ob zwei gerade Linien in einerlei Ebene sind 295
Gleichung der Ebene, welche durch einen gegebenen Punkt einer gegebenen Ebene parallel ist, und die der im Raum parallelen geraden Linien .... eb.
Gleichungen einer Geraden und einer Ebene, welche auf einander senkrecht sind 297
Ausdruck für den Abstand zweier Punkte im Raum und Gleichung der Kugel 298
Bestimmung des Winkels, welchen zwei gerade Linien im Raum mit einander einschließen 299
Bestimmung des Winkels, welchen zwei Ebenen bilden 304

Von den Flächen des zweiten Grades. 306

Allgemeine Gleichung dieser Flächen .... eb.
Von den diametralen Ebenen .... eb.
Gleichungen der Schnitte, welche durch eine Ebene gebildet werden, die einer der coordinirten Ebenen parallel liegt ... 307
Besondere Gleichungen des geraden Kegels 308
Wie eine Gleichung, welche nur zwei der Coordinaten enthält, im Raum zu einer cylindrischen Fläche gehört 311

Von den Curven im Raum betrachtet. 313

Gleichung des Kreises, welcher vermittelst des Durchschnitts einer Kugel und einer Ebene gegeben ist .... eb.
Wie man eine Curve durch die Gleichungen ihrer Projectionen darstellen kann 314
Von den Curven mit doppelter Krümmung, und von der, welche aus dem Durchschnitt einer Kugel und eines geraden Cylinders entsteht 315
Wie man erkennen kann, ob eine im Raum durch die Gleichungen ihrer Projectionen gegebene Curve eine Ebene ist oder nicht, und wie man, wenn sie von doppelter Krümmung ist, die Anzahl der Punkte bestimmt, in welchen sie von einer Ebene geschnitten wird 316

Nachträgliche Anmerkungen 319

Ueber die Ausdrücke von *sin* (a ± b) und *cos* (a ± b) ..... eb.

Ueber die Auflösung eines Dreiecks, worin man alle drei Seiten kennt, und die der Dreiecke im Allgemeinen 320

Ueber den Abstand zweier Punkte, ausgedrückt in Polarcoordinaten, und über die Fundamentalgleichungen der ebenen und spärischen Trigonometrie 323

Von der Homogenität der algebraischen Ausdrücke 326

Ueber eine symmetrische Gleichung der Ebene und andere Gleichungen von analoger Form 328

Erstes Kapitel.

Von der ebenen Trigonometrie.

§. 1.

In jedem geradlinigen Dreieck sind sechs Stücke zu betrachten, nämlich drei Seiten und drei Winkel. Es ist aber hinlänglich, einige dieser Stücke zu kennen, um daraus die übrigen herzuleiten; und wirklich folgt aus den die Congruenz der Dreiecke betreffenden Sätzen, daß man stets ein Dreieck construiren kann, wenn von den sechs Stücken, die es bilden, drei bekannt sind, wofern nur unter den bekannten Stücken sich wenigstens Eine Seite befindet. Damit nun für die Theorie des Dreiecks nichts zu wünschen übrig bleibe, muß man die Rechnung auf die geometrischen Constructionen anzuwenden wissen, weil die Genauigkeit der letzteren durch die Unvollkommenheit der Instrumente beschränkt ist, während sich vermittelst der Rechnung jeder beliebige Grad von Schärfe erlangen läßt. Dies ist der Zweck und Gegenstand der ebenen **Trigonometrie** *).

Diejenigen, welche zuerst die unter den verschiedenen Theilen eines Dreiecks statt findenden Beziehungen durch numerische Operationen oder algebraische Formeln zu entwickeln versucht

*) Sie lehrt nämlich aus so vielen Stücken, als zur Bestimmung eines geradlinigen Dreiecks erforderlich sind, die übrigen durch Rechnung finden. Anm. d. Uebersetzers.

haben, mußten sich durch die Schwierigkeit aufgehalten sehen, die Größe der Winkel in Rechnung zu bringen, da dieselben, von Kreisbogen gemessen, sich nicht unmittelbar mit geraden Linien vergleichen lassen. Sie sahen aber bald ein, daß, wenn sie durch irgend ein Mittel ein Reihe von Dreiecken würden berechnen können, deren Winkel alle mögliche Werthe hätten, in dieser Reihe nothwendig eins vorkommen müsse, das dem zu bestimmenden ähnlich wäre, wie dieses auch immer beschaffen sein möchte, und daß dann einfache Proportionen hinreichen müßten, die Theile des zweiten Dreiecks aus denen des ersten herzuleiten. Folgendes Beispiel wird das Abstracte dieser Begriffe näher erläutern.

§. 2.

Gesetzt, man kennte in dem Dreiecke ABC, *Fig.* 1, den Winkel B, den Winkel C und die Seite BC, so würde man in der Reihe der berechneten Dreiecke dasjenige aufzusuchen haben, dessen Winkel b und c einzeln genommen den Winkeln B und C gleich sind. Dieses wird dem vorgelegten Dreieck ABC ähnlich sein: und da seine Seiten ab, ac, bc bekannt sind, so wird man folgende Proportionen erhalten:

$$bc : ab = BC : AB, \quad bc : ac = BC : AC,$$

in deren jeder die drei ersten Glieder bekannt sind. Man hat folglich

$$AB = \frac{BC \times ab}{bc}, \qquad AC = \frac{BC \times ac}{bc};$$

und da überdies $A = a$ ist, so werden sämmtliche Theile des Dreiecks ABC bestimmt sein.

§. 3.

Nachdem wir nun gesehen haben, welchen Vortheil eine Reihe von Dreiecken gewähren würde, deren Seiten für alle mögliche Winkel berechnet wären, so entsteht die Frage, auf welchem Wege man eine solche Reihe bilden könne. Um zuvörderst den

einfachsten Fall zu betrachten, wollen wir annehmen, daß die zu bestimmenden Dreiecke rechtwinklig sind. Man sieht leicht, daß man sie sämmtlich in einem Quadranten construiren könne, indem man von jedem Punkt des Bogens AB, *Fig.* 2, Senkrechte MP, M′P′, M″P″ . . . auf den Halbmesser AC fällt und die Halbmesser MC, M′C, M″C . . . zieht. Die hierdurch entstehenden Dreiecke MPC, M′P′C, M″P″C . . . werden bei P, P′ P″ . . . rechtwinklig sein, und die Winkel MCP, M′CP′, M″CP″ . . . nach und nach alle mögliche Werthe erhalten; auch werden die Winkel CMP, CM′P′, CM″P″ . . ., welche mit den zugehörigen vorigen allemal einen rechten bilden, von der Beschaffenheit sein, welche die Natur der rechtwinkligen Dreiecke erfordert, und es kann kein rechtwinkliges Dreieck geben, welches nicht mit irgend einem von den durch die gegenwärtige Construction gebildeten gleichwinklig sein sollte. Zugleich ist zu bemerken, daß alle diese Dreiecke einerlei Linie zur Hypotenuse haben, nämlich den Halbmesser des Bogens AB.

§. 4.

Auch läßt sich eine Reihe rechtwinkliger Dreiecke bilden, in denen durchgehends eine der Katheten dem Halbmesser des Kreises gleich ist. Zu diesem Ende genügt es, eine Tangente AT von unbestimmter Länge durch den Endpunkt A des Bogens AB zu legen und vom Mittelpunkt C durch die Punkte M, M′, M″ . . . die Secanten CN, CN′, CN″ . . . zu ziehn. Offenbar werden in den Dreiecken CAN, CAN′, CAN″ . . . nach und nach alle Verbindungen von Winkeln entstehen, die in einem rechtwinkligen Dreieck statt finden können, und unter diesen Dreiecken wird sich nothwendig eins finden, das jedem beliebigen rechtwinkligen ähnlich ist *).

---

*) Es kommt also, wie man sieht, darauf an, eine Reihe rechtwinkliger Dreiecke zu berechnen, worin der Halbmesser die Hypotenuse bildet, und eine andere, worin der Halbmesser eine der Katheten ist. Am einfachsten ist es, den Halbmesser = 1 zu setzen. Wenn man nun für Werthe von

§. 5.

In den Dreiecken CPM, CP′M′, CP″M″ . . ., worin die Hypotenuse unveränderlich ist, haben die Seiten PM, P′M′, P″M″ . . ., die zugleich mit den Winkeln ACM, ACM′, ACM″ . . . und mit den diese Winkel messenden Bogen AM, AM′, AM″ . . . wachsen, dieser Beziehung wegen einen besondern Namen erhalten. Die Linie PM nämlich wird der Sinus des Bogens AM genannt, die Linie P′M′ der Sinus des Bogens AM′ u. s. w. Man sieht also, daß der Sinus eines Bogens die Senkrechte ist, die man von dem einen Endpunkt desselben auf den Halbmesser fället, der durch den anderen Endpunkt hindurchgeht. Die Linien CP, CP′, CP″ . . ., welche abnehmen, wenn die Bogen AM, AM′, AM″ . . . wachsen, sind, als Parallelen zwischen Parallelen, den Senkrechten MQ, M′Q′, M″Q″ . . . gleich, die man von den Punkten M, M′, M″ . . . auf den Halbmesser CB fället, der auf dem Halbmesser CA senkrecht ist, und es ist klar, daß die Linien MQ, M′Q′, M″Q″ . . . in eben der Beziehung zu den Bogen BM, BM′, BM″ . . . stehen, wie die Linien PM, P′M′, P″M″ . . . zu den Bogen AM, AM′, AM″ . . ., und daß folglich MQ der Sinus von BM, M′Q′ der von BM′, M″Q″ der von BM″ . . . ist.

Von zwei Bogen, welche zusammengenommen oder von einander abgezogen den vierten Theil des Umkreises geben, wird der eine das **Complement** des andern genannt. Die Bogen BM, BM′, BM″ . . . sind also die Complemente der Bogen AM, AM′, AM″ . . . . Man bezeichnet nun die Linien MQ, M′Q′, M″Q″ . . ., so wie die ihnen gleichen CP,

---

C, die in bestimmten Intervallen fortschreiten, in dem Dreieck MCP das Verhältniß von MC zu MP und PC, und in dem Dreieck NCA das Verhältniß von AC zu AN berechnet, und die Werthe der Seiten, die durch diese Verhältnisse ausgedrückt sind, tabellarisch ordnet, so wird sich jedes rechtwinklige Dreieck mit Hülfe einer solchen Tafel durch eine einfache Proportion leicht auflösen lassen. Uebers.

CP′, CP″ . . ., mit dem Namen Cosinus der Bogen AM, AM′, AM″ . . . . Hiernach ist der Cosinus eines Bogens der Sinus seines Complements, und so groß als der Theil des Halbmessers, welcher zwischen dem Mittelpunkt und dem Fußpunkt des Sinus liegt.

Die rechtwinkligen Dreiecke CPM, CP′M′, CP″M″ . . ., welche sämmtlich einerlei Hypotenuse haben, werden also von dem Halbmesser des Kreises und dem Sinus und Cosinus desjenigen ihrer spitzen Winkel gebildet, dessen Scheitel am Mittelpunkt liegt *).

§. 6.

Wir gehen nun zu den Dreiecken CAN, CAN′, CAN″ . . . über. Ihre Hypotenusen sind die Secanten der Bogen AM, AM′, AM″ . . .; denn man versteht unter der Secante eines Bogens den durch den einen Endpunkt desselben gezogenen und bis an die durch den anderen Endpunkt gelegte Berührungslinie verlängerten Halbmesser. Die auf der Berührungslinie AT genommenen Stücke AN, AN′, AN″ . . . sind die Tangenten der Bogen AM, AM′, AM″ . . .; denn man versteht unter Tangente eines Bogens dasjenige Stück der durch den einen Endpunkt desselben gelegten Berührungslinie, welches von den

---

*) Der zwischen dem Endpunkt P des Sinus und dem Endpunkt A des Bogens liegende Theil AP des Halbmessers AC wird der Sinus versus genannt. Diese Linie wird in der Trigonometrie nicht gebraucht. Anmerk. des Verfassers. — Der Sinus versus BQ des Bogens BM heißt der Cosinus versus des Bogens AM. Man sieht, daß der Sinus versus eines Bogens der Unterschied des Halbmessers und seines Cosinus, und sein Cosinus versus der Unterschied des Halbmessers und seines Sinus ist. In der Trigonometrie oder zur Auflösung der Dreiecke werden diese Linien zwar nicht gebraucht; aber in der Astronomie und anderen Theilen der angewandten Mathematik ist es öfters bequem, jene Unterschiede kurz mit diesen Namen zu bezeichnen. Uebers.

beiden Halbmessern, die ihn begränzen, eingeschlossen wird *).

§. 7.

Wenn man durch den Endpunkt B des Bogens AB, *Fig.* 3, die Berührungslinie Bn legt und sie so weit verlängert, bis sie die Secante CN trifft, so ist die Linie Cn die Secante des Bogens BM, des Complements von AM; man nennt sie die Cosecante des Bogens AM, so wie die Tangente von BM, nämlich Bn, die Cotangente von AM heißt, indem man unter Cotangente und Cosecante eines Bogens die Tangente und Secante seines Complements versteht. Die Cotangente und Cosecante machen, wie man sieht, nicht Bestandtheile von eben dem Dreiecke aus, zu welchem die Secante und Tangente gehören, wie dies bei dem Sinus und Cosinus der Fall ist.

§. 8.

Die Tangenten und Secanten stehen zu den Sinus und Cosinus in sehr einfachen Verhältnissen, vermittelst deren man die einen leicht aus den anderen herleiten kann. Die ähnlichen Dreiecke CPM und CAN geben die Proportion

$$CP:PM = CA:AN, \text{ woraus folgt } AN = \frac{PM \times CA}{CP},$$

und setzt man statt der Linien CP, PM und AN ihre Bezeichnungen, nämlich *cos* AM, *sin* AM und *tg* AM, und bezeichnet den Halbmesser CA mit R, so hat man

*) Man sieht, daß die Wörter Secante und Tangente hier in einem anderen Sinne, als in der Elementargeometrie genommen werden. In diesem Theil der Mathematik sind Secante und Tangente unbegränzte gerade Linien, von denen die eine den Kreis schneidet, die andere ihn berührt; in der Trigonometrie hingegen werden diese Benennungen immer von geraden Linien gebraucht, die eine bestimmte Länge haben. Wenn ein Mißverständniß zu befürchten ist, so nennt man die letzteren trigonometrische Secanten und Tangenten. Verf.

$$tg\ AM = \frac{R\ sin\ AM}{cos\ AM}.$$

In eben diesen Dreiecken CPM und CAN hat man $CP : CM = CA : CN$, also $CN = \frac{CM \times CA}{CP}$; da aber $CN = sec\ AM$, $CM = CA = R$, $CP = cos\ AM$, so ist

$$sec\ AM = \frac{R^2}{cos\ AM}.$$

§. 9.

Vergleicht man die Dreiecke CAN und CBn, welche ebenfalls einander ähnlich sind, weil sie beide einen rechten Winkel enthalten, ACN und CnB aber als Wechselwinkel mit Bezug auf die Durchschnittslinie Cn einander gleich sind, so erhält man die Proportion $AN : CA = CB : Bn = CA : Bn$, welche giebt

$$Bn = \frac{\overline{CA}^2}{AN}, \text{ d. i. } cot\ AM = \frac{R^2}{tg\ AM}.$$

Diese Proportion und die für die Secante gefundene zeigen, **daß der Halbmesser die mittlere Proportionallinie zwischen der Secante und dem Cosinus, und zwischen der Tangente und der Cotangente ist**, weil man hat

$$cos\ AM \times sec\ AM = R^2 = tg\ AM \times cot\ AM\ ^*).$$

§. 10.

Nach dem Vorhergehenden hat man, um die zur Trigonometrie erforderlichen Tafeln construiren zu können, nur noch die Mittel zur Berechnung der Sinus und Cosinus ausfindig zu machen. Selbst der Cosinus läßt sich unmittelbar aus dem

---

*) Auch ist $MP : CM = CB : Cn$, d. i. $cosec\ AM = \frac{R^2}{sin\ AM}$ mithin der Halbmesser die mittlere Proportionallinie zwischen dem Sinus und der Cosecante. Uebers.

Sinus herleiten; denn das rechtwinklige Dreieck CPM, welches beide enthält, und den Halbmesser zur Hypotenuse hat, giebt $\overline{PM}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{CM}^2$ oder $(\sin AM)^2 + (\cos AM)^2 = R^2$, d. h. das Quadrat des Halbmessers ist gleich der Summe der Quadrate des Sinus und des Cosinus, woraus folgt

$$\cos AM = \sqrt{R^2 - (\sin AM)^2}\ ^{*)}.$$

Der folgende Satz, welcher den Ausdruck für den Sinus und Cosinus der Summe oder der Differenz zweier Bogen giebt, verdient die größte Aufmerksamkeit, weil alle Eigenschaften des Sinus und Cosinus darin enthalten sind.

§. 11.

Sind a und b irgend zwei Bogen, so ist

$$\sin(a \pm b) = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{R},$$

$$\cos(a \pm b) = \frac{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b}{R}.$$

Um dies zu beweisen, nehme man, *Fig.* 4, auf dem Kreise AMB den Bogen AM = a, trage von M aus zu beiden Seiten den Bogen b nach N und N′ hin, ziehe die Sehne NN′, fälle von den Punkten N, M, N′ die Senkrechten NQ, MP, N′Q′ auf den Halbmesser AC, lege durch M den Halbmesser CM, fälle von dem Punkt E, wo er die Sehne NN′ schneidet, auf AC die Senkrechte EF und ziehe durch die Punkte E und N′ die Geraden ED und N′G mit AC parallel.

---

*) Wenn man, wie in den Tafeln R = 1 setzt, so ist $\cos a = \sqrt{1 - \sin a^2}$, $\sin v\, a = 1 - \cos a$, $\cos v\, a = 1 - \sin a$, $tg\, a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{1}{\cot a}$, $\cot a = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{1}{tg\, a}$, $\sec a = \frac{1}{\cos a}$, $cosec\, a = \frac{1}{\sin a}$. Man sieht, daß die acht sogenannten trigonometrischen Linien oder besser Winkelfunctionen durch die einfachsten Verhältnisse mit einander verbunden sind, und daß es bei der Berechnung der trigonometrischen Tafeln zuvörderst darauf ankommt, die Sinus zu finden.

Uebers.

Man sieht nun 1) daß NQ der Sinus und CQ der Cosinus des Bogens AN = AM + MN = a + b und 2) daß N′Q′ der Sinus und CQ′ der Cosinus des Bogens AN′ = AM — MN′ = a — b ist. Da aber die Sehne NN′ im Punkt E halbirt ist, weil der Halbmesser CM nach der Construction durch die Mitte des Bogens NN′ geht, so folgt aus der offenbaren Aehnlichkeit der Dreiecke NED und NN′G, daß auch NG im Punkt D halbirt, also DN = DG ist. Ferner ist DQ = EF, GQ = N′Q′ und DE = FQ, wegen des Parallelismus der Linien; und da DE die Hälfte von N′G ist, so wird auch FQ die Hälfte von Q′Q sein, so daß Q′F = QF = DE ist. Endlich ist

$$NQ = DQ + DN = EF + DN,$$
$$N'Q' = GQ = DQ - DG = EF - DN,$$
$$CQ = CF - FQ = CF - DE,$$
$$CQ' = CF + FQ' = CF + DE.$$

Setzt man nun für NQ, N′Q′, CQ, CQ′ ihre Bezeichnungen, nämlich *sin* (a + b), *sin* (a — b), *cos* (a + b), *cos* (a — b), so erhält man

$$\sin(a+b) = EF + DN, \quad \cos(a+b) = CF - DE,$$
$$\sin(a-b) = EF - DN, \quad \cos(a-b) = CF + DE.$$

Es ist nur noch übrig, die vier Linien EF, CF, DN und DE zu bestimmen.

Die beiden ersten werden vermittelst der ähnlichen Dreiecke CMP und CEF erhalten, woraus folgt

$$CM : MP = CE : EF, \quad CM : CP = CE : CF.$$

Da nun AM = a, so ist MP = *sin* a und CP = *cos* a. Ferner folgt aus den Erklärungen des Sinus und Cosinus (§. 5), daß EN der Sinus und CE der Cosinus des Bogens MN ist, so daß man hat EN = *sin* b, CE = *cos* b; überdies ist CM = R. Setzt man diese Werthe in die obigen Proportionen, so erhält man

$$EF = \frac{MP \times CE}{CM} = \frac{\sin a \cos b}{R},$$

$$CF = \frac{CP \times CE}{CM} = \frac{\textit{cos}\ a\ \textit{cos}\ b}{R}.$$

Vergleicht man endlich die Dreiecke CMP und DEN, welche, weil die Seiten des einen auf denen des andern senkrecht stehen, ähnlich sind, so bekommt man

$$CM : EN = CP : DN,\ CM : EN = PM : DE,$$

und setzt man für die drei ersten Glieder dieser Proportionen die obigen Bezeichnungen, so geben sie

$$DN = \frac{EN \times CP}{CM} = \frac{\textit{sin}\ b\ \textit{cos}\ a}{R},$$

$$DE = \frac{PM \times EN}{CM} = \frac{\textit{sin}\ a\ \textit{sin}\ b}{R}.$$

Verbindet man nun diese Werthe mit den vorhergehenden, um die von *sin* (a + b), *sin* (a — b), *cos* (a + b) und *cos* (a — b) zu bilden, so erhält man die vier Gleichungen

$$\begin{cases} \textit{sin}\ (a + b) = \dfrac{\textit{sin}\ a\ \textit{cos}\ b + \textit{sin}\ b\ \textit{cos}\ a}{R}, \\ \textit{sin}\ (a - b) = \dfrac{\textit{sin}\ a\ \textit{cos}\ b - \textit{sin}\ b\ \textit{cos}\ a}{R}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textit{cos}\ (a + b) = \dfrac{\textit{cos}\ a\ \textit{cos}\ b - \textit{sin}\ a\ \textit{sin}\ b}{R}, \\ \textit{cos}\ (a - b) = \dfrac{\textit{cos}\ a\ \textit{cos}\ b + \textit{sin}\ a\ \textit{sin}\ b}{R}, \end{cases}$$

welche in dem oben ausgesprochenen Satze enthalten sind *).

Vermittelst dieser Gleichungen kann man den Sinus und Cosinus eines Bogens finden, der das Doppelte, Dreifache und

---

*) In der Figur hat man Bogen gewählt, deren Summe kleiner ist, als der vierte Theil des Umkreises: aber es fällt nicht schwer, die Construction auf die übrigen Fälle anzuwenden. Es würden daraus für die obigen Formeln nur Zeichenveränderungen hervorgehen, den Gesetzen gemäß, welche unten in §. 22 folgd. auseinandergesetzt werden. Damit indessen in dieser Beziehung nichts zu wünschen übrig bleibe, habe ich am Ende des Buches in der Anm. A ein Verfahren angegeben, dieselben Formeln auf eine von den Verhältnissen der Figur minder abhängige Weise zu erhalten. Verf.

überhaupt das Vielfache desjenigen ist, dessen Sinus und Cosinus man kennt. Denn wenn man nach einander b = a, b = 2a setzt, so wird man haben

$$\left\{\begin{array}{l} \sin 2a = \dfrac{2 \sin a \cos a}{R}, \\ \cos 2a = \dfrac{\cos a^2 - \sin a^2\,{}^{*)}}{R}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sin 3a = \dfrac{\sin a \cos 2a + \sin 2a \cos a}{R}, \\ \cos 3a = \dfrac{\cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a}{R}, \end{array}\right.$$

und man kann durch die beiden letzten Gleichungen $\sin 3a$ und $\cos 3a$ erhalten, wenn zuvor $\sin 2a$ und $\cos 2a$ berechnet worden sind.

§. 12.

Die Gleichung $\sin 2a = \frac{2 \sin a \cos a}{R}$ leitet auch von dem Sinus eines Bogens a auf den Ausdruck für den Sinus seiner Hälfte. Wenn man nämlich statt $\cos a$ seinen Werth $\sqrt{R^2 - \sin a^2}$ setzt, so entsteht

$$\sin 2a = \frac{2 \sin a \sqrt{R^2 - \sin a^2}}{R},$$

und man findet sodann durch Quadrirung

$$R^2 \sin 2a^2 = 4R^2 \sin a^2 - 4 \sin a^4.$$

Sieht man in dieser Gleichung $\sin a$ als die Unbekannte an, so läßt sie sich nach Art der Gleichungen vom zweiten Grade auflösen, und man erhält

---

*) In der Folge werde ich immer das Quadrat des Sinus eines Bogens a durch $\sin a^2$ bezeichnen, welchen Ausdruck man nicht für den Sinus des Quadrats des Bogens a zu nehmen hat. Es bedeutet demnach $\sin a^2$ so viel als $(\sin a)^2$. Verf.

Man pflegt für $\sin a^2$, um alle Misverständnisse zu vermeiden, auch wohl die Bezeichnung $\sin^2 a$ zu gebrauchen; sie ist aber nur störend.

Uebers.

$$\sin a = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}R^2 \pm \tfrac{1}{2}R\sqrt{R^2 - \sin 2a^2}}.$$

Setzt man $2a = a'$, also $a = \frac{1}{2}a'$, so ist

$$\sin \tfrac{1}{2}a' = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}R^2 \pm \tfrac{1}{2}R\sqrt{R^2 - \sin a'^2}}$$

oder $\sin \frac{1}{2}a' = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 \pm 2R\cos a'}$,

wenn man $\cos a'^2$ statt $R^2 - \sin a'^2$ setzt (§. 10), die Größe unter dem Wurzelzeichen mit 4 multiplicirt, und außerhalb desselben durch 2 dividirt, wodurch der Ausdruck nicht geändert wird. Diese Formel giebt also den Sinus der Hälfte eines Bogens, wenn man den Sinus des ganzen Bogens kennt *).

§. 13.

Zu diesem Resultat kann man durch folgende einfache Construction gelangen.

Wenn man den Bogen AM, *Fig.* 5, in zwei gleiche Theile theilt, so wird die Sehne AQM durch den Halbmesser CN ebenfalls in zwei gleiche Theile getheilt und MQ der Sinus von MN, der Hälfte von AM, sein. Das in P rechtwinklige Dreieck AMP wird geben

$$AM = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{AP}^2},$$

und da $AP = AC - CP = R - \cos AM = R - \cos a'$ und $PM = \sin AM = \sin a'$, so wird man haben

$$AM = \sqrt{\sin a'^2 + R^2 - 2R\cos a' + \cos a'^2}$$
$$= \sqrt{2R^2 - 2R\cos a'},$$

weil $\sin a'^2 + \cos a'^2 = R^2$ ist (§. 10), und man erhält so

---

*) Sie läßt sich leichter folgendermaßen finden:

$$\cos 2a = \frac{\cos a^2 - \sin a^2}{R} = \frac{R^2 - 2\sin a^2}{R},$$

also $\sin a^2 = \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{2}R\cos 2a = \frac{1}{4}(2R^2 - 2R\cos 2a)$,

woraus $\sin a = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R\cos 2a}$.

Der Verfasser hat diesen leichtern Weg nicht gewählt, weil er an das doppelte Zeichen, das ihm seine Entwickelung unter dem Wurzelzeichen gegeben, fernere Betrachtungen knüpfen wollte. Uebers.

$$QM = \frac{1}{2} AM = \sin \frac{1}{2} a' = \frac{1}{2} \sqrt{2R^2 - 2R \cos a'} \text{*)}.$$

Auf diese Weise findet man nur den zweiten Werth von $\sin \frac{1}{2} a'$. Der andere ist MQ'; denn der Bogen $MN'A'$, welcher mit dem Bogen AM zusammengenommen den halben Umkreis giebt, hat ebenfalls zum Sinus PM, weil auch diese Linie von seinem Endpunkt M auf den Halbmesser CA', welcher durch den andern Endpunkt geht, senkrecht gefällt ist (§. 5), und da sich in der Gleichung, von welcher wir ausgegangen sind, keine Andeutung dafür findet, welcher von diesen beiden Bogen getheilt werden soll, so muß man zugleich die Sinus der beiderseitigen Hälften finden. Nach der Construction würde man haben

$$A'M = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{A'P}^2} = \sqrt{\overline{PM}^2 + (A'C + CP)^2}$$
$$= \sqrt{\sin a'^2 + (R + \cos a')^2}$$
$$= \sqrt{\sin a'^2 + R^2 + 2R \cos a' + \cos a'^2}$$
$$= \sqrt{2R^2 + 2R \cos a'},$$

folglich

$$MQ' = \sin \frac{1}{2} a' = \frac{1}{2} \sqrt{2R^2 + 2R \cos a'},$$

welches Resultat der erste Werth von $\sin \frac{1}{2} a'$ ist **).

Es ist wohl zu merken, daß, obgleich $\sin a'$ für beide Werthe von $\sin \frac{1}{2} a'$ derselbe bleibt, dennoch der Bogen a' ver-

---

*) Eigentlich hat der hier für $\sin \frac{1}{2} a'$ gefundene Werth folgende Gestalt:

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{2R^2 - 2R \cos a'},$$

wo durch das doppelte Zeichen das Entgegengesetzte der Lage der beiden Linien MQ und AQ mit Bezug auf den Halbmesser CN angedeutet wird. Beide einander gleiche Linien können für den Sinus des halben Bogens AM genommen werden. Uebers.

**) Auch dieser Werth ist mit dem doppelten Zeichen vor dem Radical versehen, um anzudeuten, daß sowohl MQ' als $A'Q'$ für $\sin \frac{1}{2} a'$ genommen werden kann. Das doppelte Zeichen vor dem Radical in dem Ausdruck $\sin \frac{1}{2} a' = \pm \sqrt{2R^2 \pm 2R \cos a'}$ hat auf das Quantitative keinen Einfluß, wohl aber das doppelte Zeichen unter dem Radical. Uebers.

schieden ist; für einen derselben ist dieser Bogen AM, und für den andern A'M, das Supplement von AM; denn man versteht unter dem Supplement eines Winkels oder Bogens das, was man zu diesem Winkel oder Bogen hinzufügen muß, um daraus zwei Rechte oder den halben Umkreis zu bilden. Man wird auch aus dem Vorstehenden schließen, daß das Supplement eines Bogens mit diesem Bogen selbst einerlei Sinus hat. Ich werde weiter unten allgemeine Begriffe über die verschiedenen Bogen geben, welche einerlei Sinus, einerlei Tangente u. s. w. haben können.

§. 14.

Aus dem Vorhergehenden folgt auch, daß der Sinus eines Bogens AN die Hälfte der Sehne AM des doppelten Bogens ANM, hingegen die Sehne AM der doppelte Sinus des Bogens AN, der Hälfte von ANM, ist. Es werden sich also, so bald die Sinus bekannt sind, die Sehnen bestimmen lassen und umgekehrt.

§. 15.

Nicht die absoluten Werthe der Sinus sind es, deren Berechnung erfordert wird, sondern nur deren Verhältniß zum Halbmesser, weil man in allen Dreiecken CPM, CP'M' . . ., *Fig.* 2, nur das Verhältniß der Seiten zu einander zu wissen braucht. Man kann daher zu größerer Einfachheit den Halbmesser als Einheit annehmen und die Sinus PM, P'M' . . . in Decimaltheilen derselben ausdrücken, oder, wie es ehemals geschah, sich den Halbmesser in 100 000 Theile getheilt vorstellen.

§. 16.

Man bemerke, daß die Länge eines Bogens immer kleiner als die seiner Tangente, und stets größer als die seines Sinus ist. Denn wenn man, *Fig.* 7, die Bogen AM und AM' ein-

ander gleich macht, die Sehne MM′ zieht und durch ihre Endpunkte die Tangenten MT und M′T legt, so sieht man leicht, daß diese Tangenten in einem Punkt des Halbmessers AC zusammentreffen müssen. Da nun die Linien MT und M′T, so wie die Linien PM und PM′ und die Bogen AM und AM′ einander gleich sind, so erhält man $2AM < 2MT$ und $2AM > 2PM$, weil die Länge eines Kreisbogens allemal zwischen den Längen der zugehörigen Theile der Umfänge des ein- und umgeschriebenen Polygons liegt (Geom. §. 151 *), mithin ist $AM < MT$ aber $> PM$.

Bei dieser Gelegenheit bemerke ich, daß das Verhältniß zwischen der Tangente und dem Sinus eines Bogens der Einheit immer näher kommt, je kleiner dieser Bogen wird; denn aus $tg\ a = \frac{R\ sin\ a}{cos\ a}$ (§. 8) folgt $\frac{sin\ a}{tg\ a} = \frac{cos\ a}{R}$, und da $cos\ a$, wenn a abnimmt, sich unaufhörlich dem Werthe von R nähert, so geht daraus hervor, daß der Bruch $\frac{cos\ a}{R}$ der Einheit immer näher kommt, welche mithin die Gränze desselben ist (Alg. §. 234).

§. 17.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Werthe der Tan-

---

*) Der hier citirte Satz ist nur ein besonderer Fall von folgendem: die Linien, welche überall nach einerlei Richtung convex sind, werden desto größer, je weiter sie von der Geraden abweichen. Denn wenn man an die krumme Linie ACB, *Fig* 8, innerhalb der krummen Linie AMB eine Tangente DE legt, so ist dieselbe kleiner als der Bogen DME, und man hat $ADEB < AMB$. Zieht man dann durch die zwischen A und C, C und B liegenden Punkte H und L die Tangenten FG und IK, so wird man eine neue gebrochene Linie AFGIKB erhalten, welche kleiner als die erste sein wird, weil $FG < FD + DG$, $IK < IE + EK$ ist. Es ist leicht einzusehen, daß man auf dieselbe Weise eine unendliche Anzahl gebrochener Linien bilden kann, welche desto kleiner werden, je mehr sie sich der krummen Linie ACB nähern, die daher nicht nur kleiner als AMB, sondern auch kleiner als alle diese gebrochenen Linien sein wird. Verf.

gente und des Sinus eines kleinen Bogens AM in einer gewissen Anzahl ihrer ersten Ziffern mit einander übereinstimmen, und daß daher diese ersten Ziffern auch einen genäherten Werth für den Bogen geben werden. Nimmt man z. B., *Fig.* 7, PM = 0,0001, so findet man

$$CP = \sqrt{\overline{CM}^2 - \overline{PM}^2} = 0{,}999\,999\,995\ ,$$

und $MT = \frac{CM \times PM}{CP} = 0{,}000\,100\,000\,000\,5,$

einen Werth, welcher sich von PM erst in der dreizehnten Stelle unterscheidet. Man kann also diese Zahl zugleich als den Werth des in Theilen des Halbmessers ausgedrückten Bogens AM ansehen *).

§. 18.

Um die Formeln der §§. 10, 11 und 12 anwenden zu können, muß man wenigstens den Sinus Eines Bogens im Quadranten kennen. Nun giebt es zwei Bogen, deren Sinus bekannt sind, nämlich den Quadranten und den dritten Theil desselben. Der Sinus des Quadranten nämlich ist dem Halbmesser, und der Sinus des dritten Theils des Quadranten der Hälfte des Halbmessers gleich. Die Richtigkeit des ersten Werthes erhellet aus *Fig.* 2, und die des zweiten daraus, daß die Seite des eingeschriebenen Sechsecks dem Halb-

*) Dasselbe ergiebt sich, wenn man den Ausdruck für die Tangente in eine Reihe verwandelt. Denn man hat $tg\ a = \frac{sin\ a}{cos\ a} = \frac{sin\ a}{\sqrt{1 - sin\ a^2}}$, (§. 8. 10); da aber $\frac{sin\ a}{\sqrt{1 - sin\ a^2}} = sin\ a\,(1 - sin\ a^2)^{-\frac{1}{2}}$, so findet man, wenn man diesen Ausdruck nach der binomischen Formel entwickelt,

$$tg\ a = sin\ a + \tfrac{1}{2}\ sin\ a^3 + \tfrac{3}{8}\ sin\ a^5 \ldots.$$

Wenn nun $sin\ a$ ein sehr kleiner Decimalbruch ist, so kann das Glied $\frac{1}{2}\ sin\ a^3$ nur auf die letztern Ziffern des Ausdrucks für $tg\ a$ Einfluß haben, und in den erstern wird $tg\ a = sin\ a$ sein. Setzt man $sin\ a$ = 0,0001, so findet man $\frac{1}{2}\ sin\ a^3$ = 0,000 000 000 000 5, ein Resultat, welches nur die dreizehnte Ziffer ändern kann. Verf.

Halbmesser gleich ist (Geom. 146). Da diese Seite, *Fig.* 9, die zu dem dritten Theil des halben Umkreises gehörige Sehne ist, so giebt ihre Hälfte den Sinus von $\frac{1}{3}$ des Quadranten (§. 14).

Geht man von dem ganzen Quadranten aus, so giebt die Formel

$$\sin \tfrac{1}{2} a' = \tfrac{1}{2} \sqrt{2R^2 - 2R \cos a'} \quad (\S.\ 13)$$

den Sinus des halben Quadranten, ferner den Sinus des vierten, kurz jedes Theils des Quadranten, welcher in der Reihe der Brüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \ldots$ begriffen ist.

Geht man dagegen vom dritten Theil des Quadranten aus, so giebt dieselbe Formel die Sinus von $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{48}, \frac{1}{96} \ldots$ desselben.

Man sieht hieraus, daß, wenn der Quadrant in eine Anzahl Theile getheilt wäre, die mit dem Nenner irgend eines der vorstehenden Brüche übereinkäme, man gerades Weges den Sinus eines jeden Theils finden und daraus eine Tafel bilden könnte, in der die Sinus den zugehörigen Bogen beigeschrieben ständen. Man hat aber eine solche Eintheilung nicht gewählt. Die indischen Astronomen allein scheinen den Quadranten in 24 Theile getheilt zu haben, um die Sinus derselben zu berechnen *). Ein sehr alter Gebrauch und nachmals anderweitige Rücksichten haben Eintheilungen herbeigeführt, die von den vorstehenden Reihen verschieden sind.

§. 19.

Man theilte sonst den Umkreis in 360 Theile, die man **Grade** nannte. Jeden Grad theilte man aufs Neue in 60 **Minuten**, jede Minute in 60 **Sekunden**, jede Sekunde in 60 **Tertien** u. s. w. Die Grade werden durch °, die Minuten durch ′, die Sekunden durch ″, die Tertien durch ‴ u. s. w. angedeutet, welche Zeichen man den Zahlen oberwärts zur Rech-

*) Vergl. die *Histoire de l'Astronomie ancienne par M. Delambre, Tom. I, p.* 456. Verf.

ten beischreibt, so daß z. B. 42° 31′ 14″ 5‴ so viel heißt als 42 Grad 31 Minuten 14 Sekunden 5 Tertien.

Da es bei der Messung der Winkel nicht auf den absoluten Werth der Bogen, sondern bloß auf ihr Verhältniß zum Umkreise ankommt, so scheint es sehr natürlich, den letztern zur Einheit zu nehmen, und die Bogen durch Brüche, sei es durch zehntheilige oder andere, auszudrücken. Besondere Rücksichten indessen haben die (französischen) Gelehrten, die mit der Reform der Maaße und Gewichte beauftragt waren, veranlaßt, den rechten Winkel zur Einheit für die Winkel, mithin den Quadranten zur Einheit für die Bogen zu wählen. Sie haben diesen in hundert gleiche Theile, die sie Grade nennen und an die Stelle der alten Grade setzen, und jeden dieser Grade wieder in hundert gleiche Theile getheilt. Die letztern Theile vertreten die Stelle der Minuten, und können nach dem Decimalsystem beliebig weiter eingetheilt werden.

Indem ich mich in diesem Werke der neuen Kreiseintheilung bediene, werde ich die Bogen durch Decimalbrüche ausdrücken. Um aber anzuzeigen, daß der Quadrant die Einheit ist, und um zu verhindern, daß man die Maaße der Bogen mit den andern Zahlen verwechsele, werde ich oberwärts zur Rechten der Ziffer der Einheiten den Buchstaben q setzen. So soll z. B. $0^q,435$ einen Bogen andeuten, welcher $\frac{435}{1000}$ oder $\frac{4350}{10000}$ des Quadranten, folglich 43 Grade und 50 Minuten enthält *).

---

*) Die Hauptgründe, weshalb man den rechten Winkel zur Einheit gewählt hat, waren vermuthlich 1) weil der ganze Umkreis eigentlich keinen Winkel mißt, indem der bewegliche Halbmesser CM, *Fig.* 2, nachdem er den Kreis durchlaufen, sich wieder an den Halbmesser CA anschließt; 2) weil der Sinus, auf welchen man alle übrigen trigonometrischen Linien bezieht, innerhalb des Quadranten oder rechten Winkels alle mögliche Werthe annimmt, deren er fähig ist. Verf.

Viele französische Mathematiker bedienen sich der Benennungen Grad, Minute, Sekunde auch bei der neuen Kreis-Eintheilung. Es ist dies aber der unvermeidlichen Verwirrung wegen, die der zwiefache Gebrauch

§. 20.

Da der Halbmesser, den man bei der Construction der Tafeln zum Grunde legt, 1 ist und der Umkreis gewöhnlich durch 2π bezeichnet wird, so ist der Sinus von AB, *Fig.* 6, oder $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$; überdies hat man $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$. Setzt man nun $a' = \frac{1}{2}\pi$, so wird die Formel

$\sin \frac{1}{2}a' = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R \cos a'}$ (§. 13) für $\sin \frac{1}{4}\pi$, oder den Sinus des halben Quadranten, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ geben *).

Wird der Bogen $AB = \frac{1}{2}\pi$ zur Einheit genommen und ist AM die Hälfte desselben, so haben wir $\sin AM = \sin 0^q,5 = \cos 0^q,5 = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,707106781186$.

Setzt man nun $a' = 0^q,5$, so findet man

$$\sin \tfrac{1}{2}a' = \sin 0^q,25 = 0,382683432365,$$
$$\cos \tfrac{1}{2}a' = \cos 0^q,25 = 0,923879532511.$$

Fährt man auf diese Weise mit Halbirung der Bogen fort, so

---

von einerlei Kunstwörtern nothwendig zur Folge haben muß, nicht zu billigen. Viel zweckmäßiger ist es, mit dem Verfasser die Bogen als Decimalbrüche zu schreiben und zu lesen, welche Bezeichnungsart auch in den deutschen Decimaltafeln von Hobert und Ideler gewählt ist. Das *q*, welches der Verfasser hinzufügt, wenn er das Verhältniß eines Bogens zum Quadranten ausdrücken will, ist allerdings nöthig, weil sonst eine Verwechslung mit dem Decimalbruch, der das Verhältniß des Bogens zum Halbmesser bezeichnen soll, statt finden könnte. Der Bogen 0,435 hält nach der alten Eintheilung im erstern Sinne genommen $39^0\ 9'$, im letztern nahe $24^0\ 55'\ 25''$. Uebrigens haben wir, um lästige Wiederholungen und selbst Verwirrungen zu vermeiden, nicht nach dem Beispiel des ersten Uebersetzers die alte Kreiseintheilung mit der neuen zusammenstellen mögen. Der deutsche Leser wird keine Schwierigkeiten finden, das, was hier über die Berechnung der trigonometrischen Linien mit Bezug auf die neue Kreiseintheilung gesagt worden ist, auf die alte überzutragen und demgemäß den Vortrag des Herrn Verfassers zu modificiren. Uebers.

*) Man kann sich hievon auch *a priori* überzeugen, weil das Dreieck CMP, *Fig.* 6, alsdann gleichschenklich ist und man daher hat

$$2\overline{PM}^2 = \overline{CM}^2 = 1,$$

mithin

$\overline{PM}^2 = \frac{1}{2}$ und $PM = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2 \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Verf.

kommt man zwar auf keinen der Decimaltheile des Quadranten, aber auf immer kleinere Bogen, die sich ihren Sinus ohne Ende nähern (§. 17). Bei der vierzehnten Division z. B. erhält man einen Bogen, der nur noch $\frac{1}{16384}$ des Quadranten ist und zum Sinus die Zahl 0,000095873799 hat, welche kleiner als 0,0001 ist. Dieser Bogen ist folglich so klein, daß er sich in den 12 ersten Decimalstellen von seinem Sinus nicht mehr unterscheidet.

Dies wird um so mehr bei den noch kleinern Bogen der Fall sein müssen. Nun ist klar, daß alle Bogen, die mit ihren Sinus und Tangenten übereinstimmige Ziffern haben, sich wie diese Linien verhalten. Mithin ist

$$\sin \frac{1^q}{16384} : \sin \frac{1^q}{100000} = \frac{1^q}{16384} : \frac{1^q}{100000}$$
$$= 100000 : 16384,$$

woraus folgt:

$$\sin 0^q,00001 = \frac{16384 \times \sin \frac{1}{16384}}{100000} = 0,000015707963,$$

welche Zahl in den ersten 12 Decimalstellen genau ist. Auf eben diese Weise findet man

$$\sin 0^q,00002 = 2 \sin 0^q,00001$$
$$\sin 0^q,00003 = 3 \sin 0^q,00001$$
$$\sin 0,00004 = 4 \sin 0^q,00001 \text{ u. s. w.}$$

Berechnet man zugleich den Cosinus und die Tangente eines jeden dieser Bogen, so sieht man, daß man diesen Weg bis zu einem Bogen verfolgen könne, dessen Sinus und Tangente noch in den ersten 12 Decimalstellen übereinstimmen.

Verlangte man die genäherten Werthe bloß bis auf 8 Stellen, so würde man nur bis auf den Bogen $0^q,001$ fortzugehen brauchen.

Um zu größern Bogen zu gelangen, kann man sich der Gleichungen

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a,$$

$$\cos 2a = \cos a^2 - \sin a^2,$$
$$\sin (a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a,$$
$$\cos (a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

bedienen, indem man in den beiden ersten nach einander $a = 0^q,001$, $a = 0^q,002 \ldots$ setzte, woraus sich ergeben wird

$$\sin 0^q,002,\ \cos 0^q,002;\ \sin 0^q,004,\ \cos 0^q,004 \ldots$$

und nimmt man dann $a = 0^q,001$, $b = 0^q,002$; $a = 0^q,002$, $b = 0^q,003 \ldots$, so erhält man vermittelst der beiden letzten Gleichungen

$$\sin 0^q,003,\ \cos 0^q,003;\ \sin 0^q,005,\ \cos 0^q,005 \ldots$$

Diese Erörterung wird hinreichen, um begreiflich zu machen, wie man die trigonometrischen Tafeln hat berechnen können. Es giebt übrigens weit bequemere Methoden, die Sinus beliebiger Bogen vermittelst convergirender Reihen zu finden, die sich aus den in §. 11 entwickelten Gleichungen herleiten lassen. Man findet sie in den beiden Werken, welche ich über die Differenzial- und Integralrechnung habe erscheinen lassen *).

---

*) Die Reihen, von denen hier die Rede ist, sind:

$$\sin A = A - \frac{A^3}{2.3} + \frac{A^5}{2.3.4.5} - \frac{A^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

$$\cos A = 1 - \frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{2.3.4} - \frac{A^6}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

A bezeichnet einen in Decimaltheilen des Halbmessers 1 ausgedrückten Bogen. Da nun jeder Kreisbogen durch $\frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$ dargestellt werden kann (die Ludolphische Zahl $\pi = 3{,}1415926535 \ldots$ drückt bekanntlich den Halbkreis für den Halbmesser 1 aus), so kann man der Sinusreihe folgende Gestalt geben:

$$\sin \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{m^3}{n^3} \cdot \frac{\pi^3}{2.3.2^3} + \frac{m^5}{n^5} \cdot \frac{\pi^5}{2.3.4.5.2^5} - \frac{m^7}{n^7} \cdot \frac{\pi^7}{2.3.4.5.6.7.2^7} + \ldots$$

Berechnet man nun die Werthe von $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi^3}{2.3.2^3}$ u. s. w. und setzt in dem ersten Theil der Gleichung den Quadranten $= 1$, so ergiebt sich für den Sinus eines in Decimaltheilen des Quadranten ausgedrückten Bogens folgende Reihe:

§. 21.

Um die Rechnungen zu erleichtern, hat man seit langer Zeit statt der Werthe der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten ihre Logarithmen gesetzt, und in den meisten Tafeln finden sich nur die letztern *). Vermittelst derselben löst man immer eine der beiden folgenden Aufgaben auf:

$$\sin\frac{m}{n} = \frac{m}{n} \cdot 1{,}57079632 \ldots$$
$$- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0{,}64596409 \ldots$$
$$+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0{,}07969262 \ldots$$
$$- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0{,}00468175 \ldots$$
$$+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0{,}00016044 \ldots$$
$$- \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0{,}00000359 \ldots$$
$$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0{,}00000005 \ldots$$
$$- \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0{,}00000000 \ldots$$
$$+ \ldots$$

welche um so convergenter wird, je kleiner der Bogen ist, dessen Sinus man sucht. Verlangt man z. B. *sin* $0^q, 01$, so ist $m = 1$ und $n = 100$, und man hat

$\sin 0^q, 01 = 0{,}0157079 \ldots - 0{,}0000006 \ldots = 0{,}0157073 \ldots$.

Ueber die bequemste und sicherste Art der Berechnung der trigonometrischen Tafeln vergleiche man die Einleitung zu den deutschen Decimaltafeln. Uebers.

*) In Ansehung derselben ist zu bemerken, daß man ihre Kennziffern in den Tafeln überall um zehn Einheiten vermehrt hat, um die negativen Kennziffern zu vermeiden. Es ist nämlich $lg\ R = lg\ \sin 1^q = 10$ gesetzt worden, nicht $= 0$, welches der eigentliche Logarithme von 1 ist. Verwirrung kann hieraus nicht entstehen, so bald man einmal weiß, daß die Kennziffern 12, 11, 10, 9, 8 so viel bedeuten, als die Kennziffern 2, 1, 0, — 1, — 2. Wenn man also $lg\ \sin 0^q, 18 = 9{,}4455904$ geschrieben findet, so sollte dafür eigentlich $0{,}4455904 - 1$ als der Logarithme der Zahl 0,2789911, der Sinus von $0^q, 18$, stehen. Die Logarithmen der trigonometrischen Linien nennt man übrigens die künstlichen Sinus, Cosinus u. s. w., die Linien selbst dagegen die natürlichen. Uebers.

1) Wenn ein Bogen gegeben ist, den Logarithmen seines Sinus, oder seines Cosinus, oder seiner Tangente, oder seiner Cotangente zu finden.

2) Wenn man den Logarithmen des Sinus, oder des Cosinus, oder der Tangente, oder der Cotangente eines Bogens kennt, diesen Bogen selbst zu finden.

Bei der Auflösung dieser Aufgaben kommt die jedesmalige Anordnung der Tafeln in Betracht, welche nicht überall dieselbe ist und bei jeder einzelnen Sammlung in der Einleitung erklärt zu werden pflegt. Ich werde daher hier nicht davon reden, sondern bloß noch die Bemerkung hinzufügen, daß die von Callet für die alte Eintheilung, und die von Borda oder die von Hobert und Ideler für die neue die besten sind.

Die trigonometrischen Tafeln umfassen immer nur das erste Viertel des Umkreises, geben aber dennoch die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten aller Bogen, so groß sie auch sein mögen. Ich werde dies sogleich zeigen, indem ich untersuche, wie die trigonometrischen Linien mit Bezug auf die verschiedenen Werthe, welche ein Kreisbogen annehmen kann, fortschreiten.

§. 22.

Um das Folgende gehörig verstehn zu können, muß man sich zuvor von dem ununterbrochenen Zusammenhange überzeugen, der allemal zwischen den verschiedenen Resultaten, die sich aus einerlei algebraischem Ausdruck oder geometrischen Construction ableiten lassen, statt findet, und welcher darin besteht, daß jedem Werthe, den der in Rede stehende Ausdruck annimmt, immer andere vorangehen oder folgen, die so wenig, als man will, von demselben unterschieden sind, und daß man sich überall in einer Linie zwei Punkte vorstellen kann, die einander so nahe liegen, als man nur will. Dies vorausgesetzt, sieht man leicht ein, daß der Halbmesser CM, *Fig.* 10, wenn er zuvor auf AC gelegen hat, und sich nun um den Punkt C wie um ein Ge-

winde dreht, nach einander mit AC alle mögliche Winkel bilden, und sein Endpunkt M nach und nach durch alle Punkte des Kreisumfangs ABA′B′A gehn oder, was einerlei ist, denselben beschreiben wird. Verfolgt man diese Bewegung aufmerksam, so sieht man zuvörderst, daß im Punkte A, wo der Bogen Null ist, auch der Sinus Null ist und der Cosinus sich nicht vom Halbmesser AC unterscheidet. Wenn der Halbmesser CM sich von AC weg bewegt, so wird der Sinus PM um so größer, je näher der Punkt M, den ich den **beschreibenden Punkt** nennen will, gegen B rückt, und wenn er daselbst anlangt, wird PM dem Halbmesser BC gleich *). Zugleich wird der Cosinus PC immer kleiner und er geht in Null über, wenn M in B fällt. Der Winkel ACB ist dann ein rechter und der Bogen AB $= \frac{1}{2}\pi$. Setzt der Punkt M seine Bewegung über B hinaus fort, so nimmt der Sinus ab, und der Cosinus, welcher nun im Durchmesser AA′ auf der der vorigen entgegengesetzten Seite des Mittelpunkts C liegt, wird immer größer. Dies lehrt der bloße Anblick der Figur: P′M′, der Sinus von ABM′, ist kleiner als BC, der Sinus von AB, und CP′, der Cosinus von ABM′, ist größer als der Cosinus von AB, welcher Null ist.

Wenn der beschreibende Punkt M in A′ anlangt, so ist der Sinus eben so wie im Punkt A gleich Null und der Cosinus wieder dem Halbmesser gleich. Im Punkt A′ ist der Bogen ABA′ der halbe Umkreis oder $= \pi$, und der Winkel ACM hat sein Maximum erreicht. Allein nichts hindert den Halbmesser CM und den beschreibenden Punkt M ihre Bewegung unterhalb des Durchmessers AA′ fortzusetzen. Der Sinus, welcher dann P″M″ wird, liegt ebenfalls unter diesem Durchmesser, und nimmt um so mehr zu, je mehr der Punkt M″ sich dem Punkt B′ nähert, während der Cosinus CP″ abnimmt. Im Punkt B′, wo der Bogen ABA′B′ $\frac{3}{4}$ des Umkreises oder

*) Der Sinus des Quadranten kann als das Ganze betrachtet werden, von welchem alle übrige Sinus Theile sind. Man nennt ihn daher auch *sinus totus*. Uebers.

$\frac{3}{2}\pi$ beträgt, ist der Sinus dem Halbmesser CB′ gleich und der Cosinus Null. Von B′ endlich bis A nimmt der Sinus P‴M‴, welcher noch immer unter AA′ liegt, ab, und der Cosinus CP‴, welcher sich wieder auf derselben Seite des Mittelpunkts befindet, wo er im ersten Quadranten AB war, zu, bis er in A abermals dem Halbmesser gleich wird. Man sieht überdies, daß, wenn die Bogen A′M′, A′M″, AM‴ dem Bogen AM an Größe gleich sind, die Sinus und Cosinus der Bogen ABM′, AA′M″, AB′M‴ sich von dem Sinus und Cosinus des Bogens AM nur durch ihre Lage unterscheiden.

Wenn der beschreibende Punkt in A angelangt ist, so hat er einen Umlauf beendigt. Er kann aber einen neuen anfangen, und sieht man immer den ganzen vom Anfange der Bewegung vom Punkt M zurückgelegten Weg als einen einzigen Bogen an, so erhält man Bogen, welche größer als der Umkreis sind, und deren Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten mit den beim ersten Umlauf beschriebenen übereinstimmen. Die für die Analysis wichtigen Folgerungen, auf welche diese Betrachtungen führen, habe ich in meinen Werken über die Differential- und Integralrechnung entwickelt.

§. 23.

Wir wollen nun sehen, wie die algebraischen Ausdrücke für die Sinus und Cosinus mit den eben betrachteten verschiedenen Umständen übereinstimmen. Zu diesem Ende setze man in den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \sin b \cos a \\ \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \end{aligned}\right\} \dots\dots (A)$$

$a = \frac{1}{2}\pi$. Erwägt man nun, daß $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$ und $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ ist, so findet man

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi \pm b) = \cos b,$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi \pm b) = \mp \sin b.$$

Bei diesen Ausdrücken ist auf zweierlei Rucksicht zu nehmen, auf den absoluten Werth und auf das Zeichen. Der Werth verifi-

cirt sich leicht vermittelst der Figur; denn da AB = $\frac{1}{2}\pi$ ist, so wird, wenn man BM′ = b setzt, AM′ = $\frac{1}{2}\pi$ + b sein. Aber P′M′, der Sinus von A′M′ so wie von AM′, ist der Cosinus von BM′ oder von b, und CP′, der Cosinus von A′M′ so wie von AM′, ist der Sinus von BM′ oder von b.

Was das Minuszeichen vor *cos* ($\frac{1}{2}\pi$ + b) betrifft, so erhellt daraus, daß, wenn man den Sinus und den Cosinus eines Bogens, der kleiner als der Quadrant ist, positiv nimmt, der Cosinus eines größern Bogens negativ ist, während sein Sinus positiv bleibt. Setzt man auch b = $\frac{1}{2}\pi$, so ist $\sin\pi = 0$ und $\cos\pi = -1$.

Setzen wir ferner in den Gleichungen (A) a = π, so erhalten wir nach dem Vorhergehenden

$$\sin(\pi \pm b) = \mp \sin b,$$
$$\cos(\pi \pm b) = -\cos b.$$

Die absoluten Werthe dieser Formeln verificiren sich eben so leicht, wie die der vorigen; ihr Zeichen giebt zu erkennen, daß ein jeder zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$ enthaltene Bogen einen negativen Sinus und Cosinus hat, und wenn b = $\frac{1}{2}\pi$ ist, so hat man

$$\sin\tfrac{3}{2}\pi = -1, \quad \cos\tfrac{3}{2}\pi = 0.$$

Setzen wir endlich a = $\frac{3}{2}\pi$, so werden sich zufolge der eben gedachten Werthe die Gleichungen (A) in folgende verwandeln:

$$\sin(\tfrac{3}{2}\pi \pm b) = -\cos b,$$
$$\cos(\tfrac{3}{2}\pi \pm b) = \pm \sin b,$$

und hieraus folgt, daß die zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und $\frac{4}{2}\pi$ oder 2 enthaltenen Bogen einen negativen Sinus und einen positiven Cosinus haben.

Nimmt man diese verschiedenen Resultate zusammen, so wird man sehen, daß, *Fig.* 10,

1) von A bis A′ oder im Bogen ABA′ = π die Sinus positiv,

2) von A′ bis A, wo der Bogen ABA′B′A = 2π ist, also von π bis 2π die Sinus negativ,

3) von A bis B, wo der Bogen AB $= \frac{1}{2}\pi$ ist, die Cosinus positiv,

4) von B bis B', wo der Bogen ABA'B' $= \frac{3}{2}\pi$ ist, also von $\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{3}{2}\pi$, die Cosinus negativ, endlich

5) von B' bis A, wo der Bogen ABA'B'A $= 2\pi$ ist, also von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π die Cosinus positiv sind.

Man wird nun leicht die Bemerkung machen, daß die Sinus das Zeichen ändern, wenn sie von einer Seite des Durchmessers AA' auf die andere übergehen, und die Cosinus, wenn sie mit Bezug auf den Mittelpunkt C, oder auf den Durchmesser BB', der auf dem vorigen senkrecht steht, ihre Lage ändern.

Hiernach wird man die in §. 11 entwickelten Formeln auf jede beliebige Größe der Bogen MA und MN, *Fig.* 4, ausdehnen können, und die aus diesen Formeln geschlossenen Werthe werden mit denen übereinstimmen, die sich aus der Construction und aus den in dem gedachten §. angestellten Betrachtungen ergeben würden, wenn man dieselben unmittelbar auf die vorgelegten Bogen anwendete, eine Uebung, die dem Anfänger nützlich sein kann *).

§. 24.

Wenn man die Tangenten des wachsenden Bogens AM, *Fig.* 10, verfolgt, so wird man finden, daß sie von A bis B, wo der Bogen AM $= \frac{1}{2}\pi$ wird, unaufhörlich zunehmen. Da in dem letzteren Punkt die Secante CN mit dem Halbmesser CB zusammenfällt, so ist sie der Tangente AN parallel, und trifft sie folglich gar nicht mehr, so daß der Bogen AB eigentlich gar keine trigonometrische Tangente hat. Man sagt jedoch,

---

*) Es schien mir hinreichend, hier die Uebereinstimmung zwischen den Zeichen der trigonometrischen Linien und ihrer Lage nachzuweisen. Die Theorie dieser Uebereinstimmung und den Beweis des Satzes, daß jede mit dem Zeichen — behaftete Linie in einem entgegengesetzten Sinne genommen werden muß, als der ist, welchen sie mit dem Zeichen + hat, findet man unten im Anfange der Anwendung der Algebra auf die Geometrie. Verf.

daß die Tangente desselben unendlich sei, was nichts anderes heißen soll, als daß man, wenn der Punkt M dem Punkt B nahe genug genommen wird, eine Tangente finden kann, welche größer als jede beliebige Größe ist. Dies erhellet auch aus der Gleichung $tg\ a = \frac{sin\ a}{cos\ a}$, welche für tg a einen um so größeren Werth giebt, je kleiner cos a wird, oder je näher man dem Punkt B kommt.

Ist a $= 0^q, 5$, so ist $cos\ a = sin\ a$, folglich $tg\ 0^q, 5 = 1$. Dies ergiebt sich auch aus dem Dreieck CAN, *Fig.* 6, welches gleichschenklich wird, wenn ACN ein halber rechter Winkel ist, weil dann auch ANC ein halber rechter sein muß; die Tangente AN ist daher dem Halbmesser gleich.

Wenn der Bogen AM, *Fig.* 10, größer als $\frac{1}{2}\pi$ wird, so kann der Halbmesser CM die Linie AN nicht mehr oberhalb, sondern nur unterhalb des Durchmessers AA′ schneiden. Die eigentliche Tangente AN′ ist, wie man leicht einsieht, der Tangente A′n′ des Bogens A′M′, des Supplements von AM′, gleich, allein sie hat eine entgegengesetzte Lage. Im dritten Quadranten liegt die Tangente, die im Punkt A′ Null war, wieder oberhalb des Durchmessers AA′, und AN ist die Tangente des Bogens AA′M″. Da im Punkt B′ der Halbmesser wieder der Linie AN parallel ist, so wird die Tangente in diesem Punkt abermals unendlich. Im vierten Quadranten fällt sie wieder unterhalb des Halbmessers; denn der Bogen AB′M‴ z. B. hat offenbar zur Tangente die Linie AN′.

§. 25.

Wir wollen nun sehen, was aus dem algebraischen Ausdruck $tg\ a = \frac{sin\ a}{cos\ a}$ folgen wird.

Der Werth desselben wird offenbar in allen den Fällen positiv sein, wo der Sinus und der Cosinus einerlei Zeichen haben, was von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ und von π bis $\frac{3}{2}\pi$ der Fall ist, und

negativ, wenn der Sinus und der Cosinus von verschiedenen Zeichen sind, also von $\frac{1}{2}\pi$ bis π und von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π. Hieraus folgt, daß sich bei den Tangenten, eben so wie bei den Sinus und Cosinus, die Zeichen zugleich mit der Lage ändern. Auf eben diese Art wird man finden, daß die Cotangenten von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ und von π bis $\frac{3}{2}\pi$ positiv, hingegen von $\frac{1}{2}\pi$ bis π und von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π negativ sind.

§. 26.

Die Sinus und Cosinus der negativen Bogen, auf die man bei der Rechnung zuweilen trifft, lassen sich ebenfalls leicht aus den Formeln des eilften §. ableiten. Da nämlich der Ausdruck für $\sin(a - b)$ sein Zeichen ändert, wenn man a in b und b in a verwandelt, so sieht man, daß $\sin(b - a) = -\sin(a - b)$ ist. Ist also $a > b$, so ist $b - a$ negativ und der negative Bogen erhält einen negativen Sinus.

Construirte man die Figur 69 in dieser Voraussetzung, indem man $AM = b$, $MN = a$ nähme, und trüge den letztern Bogen unterhalb M hin, um das Verfahren des eilften §en in Anwendung zu bringen, so würde der Bogen AN′ nicht, wie in Figur 4, oberhalb AC, sondern unterhalb liegen, also der Sinus Q′N′ eben so wie der Bogen seine Lage ändern. Der Cosinus dagegen würde auf derselben Seite des Mittelpunkts bleiben, was sich auch aus der Formel ergiebt, indem man $\cos(b - a) = \cos(a - b)$ erhält *).

---

*) Noch einfacher erhellet dies so: es sei, *Fig.* 69, $AM = AM'$, so ist $MP = M'P$. Aber MP, der Sinus von AM, und M′P, der Sinus von AM′, haben eben so, wie die zugehörigen Bogen, eine entgegengesetzte Lage mit Bezug auf den Halbmesser CA; mithin ist der Sinus eines negativen Bogens der negativ genommene Sinus des eben so großen positiven Bogens. Dagegen haben AM und AM′ der Größe und Lage nach einerlei Cosinus CP. Was von dem Sinus gesagt ist, gilt auch von der Tangente, wie dies schon aus der Formel $tg\ a = \frac{\sin a}{\cos a}$ folgt.

Uebers.

§. 27.

Aus dem im eilften §. bewiesenen Satze lassen sich noch anderweitige sehr wichtige Folgerungen ziehen, von denen wir einige in der Folge gebrauchen werden, weshalb wir sie hieher setzen wollen.

1) Wenn man die beiden Gleichungen

$$sin\,(a + b) = \frac{sin\,a\,cos\,b + sin\,b\,cos\,a}{R},$$

$$sin\,(a - b) = \frac{sin\,a\,cos\,b - sin\,b\,cos\,a}{R}$$

addirt, so erhält man

$$sin\,(a + b) + sin\,(a - b) = \frac{2\,sin\,a\,cos\,b}{R},$$

woraus folgt $sin\,a\,cos\,b = \frac{R}{2}\,sin\,(a + b) + \frac{R}{2}\,sin\,(a - b)$.

2) Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, so entsteht

$$sin\,(a + b) - sin\,(a - b) = \frac{2\,sin\,b\,cos\,a}{R},$$

folglich $sin\,b\,cos\,a = \frac{R}{2}\,sin\,(a + b) - \frac{R}{2}\,sin\,(a - b)$.

Setzt man $b = a$, so giebt diese Formel, eben so wie die vorhergehende,

$$sin\,a\,cos\,a = \frac{R}{2}\,sin\,2\,a.$$

3) Wenn man die beiden Gleichungen

$$cos\,(a + b) = \frac{cos\,a\,cos\,b - sin\,a\,sin\,b}{R},$$

$$cos\,(a - b) = \frac{cos\,a\,cos\,b + sin\,a\,sin\,b}{R},$$

addirt, so erhält man

$$cos\,(a + b) + cos\,(a - b) = \frac{2\,cos\,a\,cos\,b}{R},$$

und hieraus $\cos a \cos b = \frac{R}{2} \cos (a + b) + \frac{R}{2} \cos (a - b)$,

Ist $a = b$, so giebt diese Formel

$$\cos a^2 = \frac{R}{2} \cos 2a + \frac{R^2}{2},$$

indem der Cosinus dem Halbmesser gleich ist, wenn der Bogen Null wird.

4) Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so entsteht

$$\cos (a - b) - \cos (a + b) = \frac{2 \sin a \sin b}{R},$$

woraus folgt

$$\sin a \sin b = \frac{R}{2} \cos (a - b) - \frac{R}{2} \cos (a + b).$$

Ist $a = b$, so giebt diese Formel

$$\sin a^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{R}{2} \cos 2a$$

5) Setzt man $a + b = a'$, und $a - b = b'$, so findet man, wenn man diese beiden Gleichungen addirt, $2a = a' + b'$, und wenn man die zweite von der ersten subtrahirt, $2b = a' - b'$; hieraus folgt $a = \frac{a' + b'}{2}$ und $b = \frac{a' - b'}{2}$.

Wenn man nun diese Werthe von a und b in die Ausdrücke für $\sin a \cos b$, $\sin b \cos a$, $\cos a \cos b$ und $\sin a \sin b$ setzt, so findet man

$$\sin \tfrac{1}{2} (a' + b') \cos \tfrac{1}{2} (a' - b') = \frac{R}{2} (\sin a' + \sin b'),$$

$$\cos \tfrac{1}{2} (a' + b') \sin \tfrac{1}{2} (a' - b') = \frac{R}{2} (\sin a' - \sin b'),$$

$$\cos \tfrac{1}{2} (a' + b') \cos \tfrac{1}{2} (a' - b') = \frac{R}{2} (\cos a' + \cos b'),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(a'+b')\sin\tfrac{1}{2}(a'-b') = \frac{R}{2}(\cos b' - \cos a').$$

Dividirt man die zweite dieser Gleichungen durch die erste, so erhält man

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a'+b')\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')\cos\frac{1}{2}(a'-b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\cos\frac{1}{2}(a'-b')}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(a'+b')}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}$$

$$= \frac{\sin a' - \sin b'}{\sin a' + \sin b'}.$$

Erwägt man nun, daß $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{tg\ A}{R}$ (§. 8), mithin $\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{R}{tg\ A}$ ist, so erhält man $\frac{tg\frac{1}{2}(a'-b')}{tg\frac{1}{2}(a'+b')} = \frac{\sin a' - \sin b'}{\sin a' + \sin b'}$.

Auf dieselbe Weise kann man aus den beiden letztern Gleichungen herleiten, daß

$$\frac{\cos b' - \cos a'}{\cos a' + \cos b'} = \frac{tg\frac{1}{2}(a'+b')\,tg\frac{1}{2}(a'-b')}{R^2}$$ ist.

6) Wenn man den Ausdruck für $\sin(a \pm b)$ durch den für $\cos(a \pm b)$ dividirt, so wird man haben

$$\frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a \pm b)} = \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b},$$

und dividirt man dann den Zähler und Nenner des Bruchs im zweiten Theil durch $\cos a \cos b$, so verwandelt sich derselbe in

$$\frac{\frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b}}{1 \mp \frac{\sin a}{\cos a}\cdot\frac{\sin b}{\cos b}};$$

da nun im Allgemeinen $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{tg\ A}{R}$ (§. 8), so erhält man

$$\frac{tg(a \pm b)}{R} = \frac{\frac{tg\ a}{R} \pm \frac{tg\ b}{R}}{1 \mp \frac{tg\ a}{R}\cdot\frac{tg\ b}{R}} = \frac{R(tg\ a \pm tg\ b)}{R^2 \mp tg\ a\ tg\ b},$$

und endlich $tg(a \pm b) = \frac{R^2(tg\ a \pm tg\ b)}{R^2 \mp tg\ a\ tg\ b}$.

Da

Da $cot\ A = \frac{R^2}{tg\ A}$ (§. 9), so ergiebt sich

$$cot\ (a \pm b) = \frac{R^2}{tg\ (a \pm b)} = \frac{R^2 \mp tg\ a\ tg\ b}{tg\ a \pm tg b}$$

$$= \frac{R^2 \mp \frac{R^2}{cot\ a} \cdot \frac{R^2}{cot\ b}}{\frac{R^2}{cot\ a} \pm \frac{R^2}{cot\ b}},$$

oder nach gehöriger Reduction

$$cot\ (a \pm b) = \frac{cot\ a\ cot\ b \mp R^2}{cot\ b \pm cot\ a}$$

§. 28.

Die Gleichung $\frac{tg\ \frac{1}{2}\ (a' - b')}{tg\ \frac{1}{2}\ (a' + b')} = \frac{sin\ a' - sin\ b'}{sin\ a' + sin\ b'}$, aus welcher folgt, daß die Summe der Sinus zweier Bogen sich zu ihrer Differenz verhält, wie die Tangente der halben Summe dieser Bogen zur Tangente ihrer halben Differenz, kann auch unmittelbar durch eine elegante geometrische Construction erhalten werden.

Wenn AM und AN, *Fig.* 10*, die Bogen a′ und b′ vorstellen, so wird man haben MP = *sin* a′, NQ = *sin* b′. Zieht man NC dem Durchmesser AB parallel und verlängert MP bis M′, so ist

$$MR = MP - NQ = sin\ a' - sin\ b'$$
$$M'R = M'P + NQ = sin\ a' + sin\ b'\ (§.\ 14).$$

Nun beschreibe man aus dem Punkt C als Mittelpunkt mit einem Halbmesser CD, welcher dem des Kreises ACB gleich ist, einen Bogen EDG und lege an denselben durch den Punkt D eine Berührungslinie, welche durch CM und CM′ begränzt wird, so werden offenbar DF und DH die Tangenten der Bogen DE und DG sein, welche die Winkel MCN und NCM′ messen; und da die Scheitel dieser Winkel im Umkreise ACB liegen, so werden sie die Hälfte von

$$NM = AM - AN = a' - b'$$

und von $NM' = AM' + AN = a' + b'$

zum Maaß haben; mithin wird

$$DF = tg\ \tfrac{1}{2}\,(a' - b') \text{ und } DH = tg\ \tfrac{1}{2}\,(a' + b')$$

sein. Da aber MM′ und FH parallel sind, so wird man folgende Proportion haben:

$$MR : M'R = DF : DH,$$

also

$$sin\ a' - sin\ b' : sin\ a' + sin\ b' = tg\ \tfrac{1}{2}(a' - b') : tg\ \tfrac{1}{2}(a' + b')$$

oder

$$\frac{tg\ \tfrac{1}{2}\,(a' - b')}{tg\ \tfrac{1}{2}\,(a' + b')} = \frac{sin\ a' - sin\ b'}{sin\ a' + sin\ b'}.$$

Es ist leicht, diese Construction dergestalt zu modificiren, daß sie alle die verschiedenen Gleichungen giebt, welche der eben bewiesenen analog sind.

§. 29.

Da man öfters Gelegenheit hat, von den im Vorhergehenden entwickelten Formeln Gebrauch zu machen, so haben wir sie nebst einigen andern, die sich leicht daraus ergeben, in folgender Tafel zusammengestellt.

Die jeder Formel beigesetzte Zahl zeigt den Paragraphen an, in welchem sie gefunden worden sind, oder aus dem sie abgeleitet werden können.

Tafel
der gebräuchlichsten trigonometrischen Formeln.

$$\sin a^2 + \cos a^2 = R^2 \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin(a \pm b) &= \frac{\sin a \cos b \pm \sin b \cos a}{R}\\ \cos(a \pm b) &= \frac{\cos a \cos b \mp \sin a \sin b}{R}\end{aligned}\right\} (11)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin a \cos b &= \tfrac{1}{2} R\,[\sin(a+b) + \sin(a-b)]\\ \cos a \sin b &= \tfrac{1}{2} R\,[\sin(a+b) - \sin(a-b)]\\ \cos a \cos b &= \tfrac{1}{2} R\,[\cos(a+b) + \cos(a-b)]\\ \sin a \sin b &= -\tfrac{1}{2} R\,[\cos(a+b) - \cos(a-b)]\end{aligned}\right\} (27)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin a + \sin b &= \frac{2}{R} \sin \tfrac{1}{2}(a+b) \cos \tfrac{1}{2}(a-b)\\ \sin a - \sin b &= \frac{2}{R} \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \sin \tfrac{1}{2}(a-b)\\ \cos a + \cos b &= \frac{2}{R} \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \cos \tfrac{1}{2}(a-b)\\ \cos a - \cos b &= -\frac{2}{R} \sin \tfrac{1}{2}(a+b) \sin \tfrac{1}{2}(a-b)\end{aligned}\right\} (27)$$

$$\sin 2a = \frac{2 \sin a \cos a}{R} \; (11); \; \sin \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R \cos a} \quad (13)$$

$$\cos 2a = \frac{\cos a^2 - \sin a^2}{R} = \frac{2 \cos a^2 - R^2}{R} \quad (11)$$

$$\sin a^2 = \tfrac{1}{2} R\,(R - \cos 2a) \quad (27)$$

$$\cos a^2 = \tfrac{1}{2} R\,(R + \cos 2a) \quad (27)$$

$$\sin a^2 - \sin b^2 = \cos b^2 - \cos a^2 = \sin(a+b) \sin(a-b) \quad (11,10)$$

$$\cos a^2 - \sin b^2 = \cos(a+b) \cos(a-b) \quad (11, 10)$$

$$tg\, a = \frac{R \sin a}{\cos a} \; (8), \; \cot a = \frac{R^2}{tg\, a} = \frac{R \cos a}{\sin a} \quad (9)$$

$$\sec a = \frac{R^2}{\cos a}, \; \operatorname{cosec} a = \frac{R^2}{\sin a} \quad (8)$$

$$tg(a \pm b) = \frac{R \sin(a \pm b)}{\cos(a \pm b)} = \frac{R^2 (tg\, a \pm tg\, b)}{R^2 \mp tg\, a\, tg\, b} \quad (27)$$

Fortsetzung der Tafel der trigonometrischen Formeln.

$$\left.\begin{aligned}
tg\,a + tg\,b &= \frac{R^2 \sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\
tg\,a - tg\,b &= \frac{R^2 \sin(a-b)}{\cos a \cos b} \\
\cot a + \cot b &= \frac{R^2 \sin(a+b)}{\sin a \sin b} \\
\cot a - \cot b &= -\frac{R^2 \sin(a-b)}{\sin a \sin b}
\end{aligned}\right\} (8,\ 11)$$

$$\left.\begin{aligned}
tg\,a^2 - tg\,b^2 &= \frac{R^4 \sin(a+b) \sin(a-b)}{\cos a^2 \cos b^2} \\
\cot a^2 - \cot b^2 &= -\frac{R^4 \sin(a+b) \sin(a-b)}{\sin a^2 \sin b^2}
\end{aligned}\right\} (8,\ 11)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(a+b)}{tg\,\frac{1}{2}(a-b)} \\
&\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(a+b)}{R}\,;\quad \frac{\sin a}{R + \cos a} = \frac{tg\,\frac{1}{2}a}{R} \\
&\frac{\sin a + \sin b}{\cos a - \cos b} = -\frac{\cot\frac{1}{2}(a-b)}{R}\,;\quad \frac{\sin a}{R - \cos a} = \frac{\cot\frac{1}{2}a}{R} \\
&\frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(a-b)}{R} \\
&\frac{\sin a - \sin b}{\cos a - \cos b} = -\frac{\cot\frac{1}{2}(a+b)}{R} \\
&\frac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} = -\frac{\cot\frac{1}{2}(a-b)}{tg\,\frac{1}{2}(a+b)} = -\frac{\sec a + \sec b}{\sec a - \sec b}
\end{aligned}\right\} (27)$$

$$\sin a = \frac{R\,tg\,a}{\sqrt{R^2 + tg\,a^2}}\,;\ \cos a = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + tg\,a^2}}\ (8,\ 10)$$

$R = \sin 1^q = \cos 0^q = tg\,0^q{,}5 = \cot 0^q{,}5 = \sec 0^q = \mathrm{cosec}\,1^q$
$= \frac{1}{2} \sec \frac{2}{3}^q$ (23, 24); $\sin a = \frac{1}{2}\,chord\ 2a$ (14)

$$\left.\begin{aligned}
\sin(1^q \pm b) &= +\cos b\,;\ \cos(1^q \pm b) = \mp \sin b \\
\sin(2^q \pm b) &= \mp \sin b\,;\ \cos(2^q \pm b) = -\cos b \\
\sin(3^q \pm b) &= -\cos b\,;\ \cos(3^q \pm b) = \pm \sin b \\
\sin(4^q \pm b) &= \pm \sin b\,;\ \cos(4^q \pm b) = +\cos b
\end{aligned}\right\} (23).$$

§. 30.

Ich werde nun von dem Gebrauch der trigonometrischen Tafeln bei Auflösung der Dreiecke handeln. Zu dem Ende muß man sich erinnern, daß vermittelst dieser Tafeln, so bald man einen Winkel kennt, die Werthe seines Sinus, seines Cosinus, seiner Tangente nnd seiner Cotangente gleichfalls bekannt sind, und daß umgekehrt, wenn der Werth einer dieser Linien gegeben ist, auch der des zugehörigen Bogens als bekannt angesehen werden kann.

Es sei, *Fig.* 11, CDE ein bei D rechtwinkliges Dreieck. Aus dem Scheitelpunkte eines der spitzen Winkel C schreibe man mit einem Halbmesser, welcher dem der Tafeln gleich ist, den Bogen AM, fälle auf AC die Senkrechte MP und errichte schließlich die Tangente AN, um die beiden Dreiecke der Tafeln zu bilden, nämlich CPM, welches das des Sinus und Cosinus, und CAN, welches das der Tangente und Secante ist. Beide sind dem vorgelegten Dreieck ähnlich, und wenn man sie nach einander mit diesem vergleicht, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{l} CM : PM = CE : DE \\ CM : CP = CE : CD \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} R : sin\ C = CE : DE \\ R : cos\ C = CE : CD \end{array}\right.$$

$$CA : AN = CD : DE \quad \text{oder} \quad R : tg\ C = CD : DE$$

Da E das Complement von C ist, so hat man $cos\ C = sin\ E$. Die beiden ersten Proportionen können also folgendermaßen in Eine zusammengefaßt und in Worten ausgedrückt werden: **der Halbmesser verhält sich zum Sinus eines der spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, wie die Hypotenuse zu der diesem spitzen Winkel gegenüberliegenden Kathete.**

Die dritte lehrt, daß sich **der Halbmesser zur Tangente eines der spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks verhält, wie die an diesem Winkel anliegende Kathete zur gegenüberliegenden.**

Da der Halbmesser immer gegeben ist, so braucht man von den drei übrigen Gliedern vorstehender Proportionen nur zwei

zu kennen, um das vierte zu finden. Vermittelst der ersten wird man also von den drei Stücken: **Hypotenuse, eine Kathete** und **ein spitzer Winkel** allemal eins bestimmen können, wenn man zwei derselben kennt.

Ich sage schlechthin **ein spitzer Winkel**, obgleich die Proportion erfordert, daß dieser Winkel entweder der gegebenen oder der gesuchten Kathete gegenüberstehe, weil der eine spitze Winkel sogleich den andern bestimmt; daher man, wenn der, welchen man kennt oder sucht, dieser Bedingung nicht Genüge leistet, sein Complement nehmen kann.

Vermittelst der zweiten Proportion läßt sich immer eins der drei Stücke: **die beiden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks** und **ein spitzer Winkel** bestimmen, wenn man zwei derselben kennt.

Hieraus folgt, daß man 1) aus einer Seite und einem Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks die beiden andern Seiten, und 2) aus irgend zwei bekannten Seiten die spitzen Winkel berechnen kann.

Unter diesen beiden Fällen ist derjenige nicht begriffen, wo man aus zwei Seiten des Dreiecks die dritte bestimmen soll. Dieser läßt sich jedoch unmittelbar zufolge der bekannten Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks auflösen, daß $\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{CE}^2$, woraus $CE = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2}$ folgt.

Wenn man die Hypotenuse CE und eine der Katheten z. B. DE kennte, so würde man erhalten

$$CD = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{DE}^2}.$$

Erwägt man, daß $\overline{CE}^2 - \overline{DE}^2 = (CE + DE)\,(CE - DE)$, und nimmt auf beiden Seiten der Gleichung

$$CD = \sqrt{(CE + DE)\,(CE - DE)}$$

die Logarithmen, so findet man

$$lg\ CD = \tfrac{1}{2}\,[lg\ (CE + DE) + lg\ (CE - DE)].$$

Wenn man Formeln entwickelt, welche bei Zahlenrechnungen gebraucht werden sollen, muß man ihnen immer eine solche

Gestalt zu geben suchen, daß sich die Logarithmen bequem auf sie anwenden lassen, ich meine, daß man sich so wenig als möglich genöthigt sehe, während der Rechnung von den Logarithmen zu den Zahlen, und von den Zahlen wieder zu den Logarithmen überzugehen. Wenn man die Logarithmen auf die Bestimmung von CD vermittelst des erstern Ausdrucks anwendet, wird man sich leicht von der Wichtigkeit dieser Regel überzeugen.

Ich will diese Anweisung zur Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke mit der Bemerkung schließen, daß die beiden zuletzt betrachteten Fälle sich auch vermittelst der zu Anfang dieses §en beigebrachten Proportionen auflösen lassen; denn wenn man 1) CD und DE kennt und CE finden will, so kann man zuvörderst einen der spitzen Winkel, z. B. C, vermittelst der Proportion R : *tg* C = CD : DE berechnen und dann die Hypotenuse CE durch die Proportion R : *sin* C = CE : DE bestimmen, in welcher die drei Glieder R, *sin* C und DE bekannt sind. 2) Kennt man die Hypotenuse CE und eine der beiden Katheten, z. B. CD, so kann man den der gesuchten Seite gegenüberstehenden spitzen Winkel vermittelst der Proportion R : *sin* E oder *cos* C = CE : CD finden und dann die Seite DE vermittelst der Proportion R : *sin* C = CE : DE berechnen.

§. 31.

Was bisher über die Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke gesagt worden ist, läßt sich kurz und bequem darstellen, wenn man die Winkel durch A, B, C bezeichnet, wo A der rechte ist, und die diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten durch a, b, c, wie es *Fig.* 12 zu erkennen giebt.

Nach dem ersten Satz wird man haben

$$R : \sin C = a : c, \quad R : \sin B = a : b,$$

woraus folgt

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{R}, \quad \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{R}.$$

Schafft man aus beiden Gleichungen a weg, was dadurch geschieht, daß man jeden Theil der ersten durch den entsprechenden der zweiten dividirt, so hat man

$$\frac{c}{b} = \frac{sin\ C}{sin\ B},$$

und da $sin\ B = cos\ C$ und $\frac{sin\ C}{cos\ C} = \frac{tg\ C}{R}$, so ist $\frac{c}{b} = \frac{tg\ C}{R}$, eine Gleichung, welche den zweiten Satz des vorhergehenden §en ausdrückt.

Quadrirt man endlich jeden Theil der beiden ersten Gleichungen, und nimmt die entsprechenden Theile der hieraus entspringenden Gleichungen zusammen, indem man erwägt, daß

$$sin\ C^2 + sin\ B^2 = sin\ C^2 + cos\ C^2 = R^2\ (\S\ 10),$$

so erhält man

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = 1 \text{ oder } b^2 + c^2 = a^2.$$

Hieraus folgt, daß die Gleichungen

$$\frac{c}{a} = \frac{sin\ C}{R}, \frac{b}{a} = \frac{sin\ B}{R}$$

nebst der zwischen den Winkeln B und C statt findenden Beziehung zur Bestimmung aller Fälle, die beim rechtwinkligen Dreieck vorkommen können, hinreichend sind *).

---

*) Die Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke ist sehr einfach, wenn man erwägt, daß der Sinus eines jeden spitzen Winkels das Verhältniß der gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse, der Cosinus das Verhältniß der anliegenden Kathete zur Hypotenuse, und die Tangente das Verhältniß der gegenüberliegenden Kathete zur anliegenden ausdrückt, oder daß $sin\ C = cos\ B = \frac{c}{a}$, $cos\ C = sin\ B = \frac{b}{a}$ und $tg\ C = cot\ B = \frac{c}{b}$ ist. Es kann kein Fall, der des pythagorischen Satzes ausgenommen, vorkommen, wo sich nicht das Gegebene und das Gesuchte in einer dieser Gleichungen beisammen finden sollte. Um zum Behuf der logarithmischen Rechnung den Halbmesser in diese, so wie in alle andere trigonometrische

§. 32.

Das Princip, auf welches sich die Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke gründet, führt zugleich zur Auflösung aller übrigen Dreiecke. Fällt man aus der Spitze B des Dreiecks ABC, *Fig.* 13, die Senkrechte BD auf die Grundlinie AC, so bildet man zwei bei D rechtwinklige Dreiecke ABD und CBD. Im ersten ist

$$R : \sin A = AB : BD$$

und im zweiten

$$R : \sin C = BC : BD,$$

welches giebt

$$R \times BD = \sin A \times AB, \quad R \times BD = \sin C \times BC,$$

woraus folgt

$$\sin A \times AB = \sin C \times BC \text{ oder } \sin A : \sin C = BC : AB.$$

Wenn die Senkrechte außerhalb fällt, so ist der Winkel C nicht den beiden Dreiecken ABC und BCD gemein; allein die Winkel BCD und BCA, welche zusammen zwei Rechte ausmachen, haben einerlei Sinus (§. 22).

Die eben gefundene Porportion giebt den allgemeinen Satz: *in jedem Dreieck verhalten sich die Sinus der*

Gleichungen, worin er nicht ausdrücklich vorkommt, zu bringen, bemerke man, daß sämmtliche trigonometrische Gleichungen, nachdem die Bruchformen weggeschafft sind, in allen Gliedern eine gleiche Anzahl Dimensionen oder Faktoren enthalten, wenn man den Halbmesser nicht der Einheit gleich setzt. Erscheint er also nicht, so muß man ihn so anbringen, daß die Gleichung von der gedachten Beschaffenheit werde. Hat man z. B. die Gleichungen $\sin C = \frac{c}{a}$ und $\cot b = \frac{1}{tg\, b}$, so giebt die erste $a \sin C = c$ und die zweite $\cot b \,.\, tg\, b = 1$. In der ersten hat man links zwei Faktoren, rechts einen, in der zweiten links zwei, rechts keinen; denn die Einheit wird hiebei, wie jeder andere numerische Faktor, nicht mitgezählt. Es muß also $a \,.\, \sin C = R \,.\, c$ und $tg\, b \,.\, \cot b = R^2$ oder $\sin C = \frac{R \,.\, c}{a}$ und $\cot b = \frac{R^2}{tg\, b}$ geschrieben werden.

Uebers.

Winkel wie die Seiten, die diesen Winkeln gegenüberstehen.

§. 33.

Derselbe Satz läßt sich auch auf folgende Art beweisen, welche dem in den beiden ersten Paragraphen von der Trigonometrie gegebenen Begriff mehr analog zu sein scheint.

Nachdem man *Fig.* 13* um das Dreieck ABC einen Kreis, aus dem Mittelpunkt O dieses Kreises mit dem Halbmesser Oa der Tafeln einen zweiten Kreis abc beschrieben und die Punkte, worin die Halbmesser AO, BO, CO den letzteren schneiden, durch die graden Linien ab, bc und ac verbunden hat, wird ein dem vorgelegten ähnliches Dreieck gebildet, dessen Seiten ab, bc und ac sich aus den Tafeln bestimmen lassen.

Die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke ABC und abc wird einleuchtend, wenn man in Erwägung zieht, daß, weil die geraden Linien aO, bO und cO, so wie die geraden AO, BO und CO als Halbmesser Eines Kreises einander gleich sind, die Seiten AO und BO, BO und CO, AO und CO der Dreiecke AOB, BOC und AOC in den Punkten a und b, b und c, a und c proportional geschnitten werden, und daher die geraden Linien AB und ab, BC und bc, AC und ac parallel sind. Man hat demnach

$$AB : BC : AC = ab : bc : ac = \tfrac{1}{2}ab : \tfrac{1}{2}bc : \tfrac{1}{2}ac.$$

Da nun die Scheitel der Winkel des Dreiecks abc im Umkreise liegen, so wird jeder die Hälfte des Bogens, auf welchem er steht, zum Maaß haben, und von jeder dieser Hälften wird offenbar die Hälfte der Seite, welche den ganzen Bogen bespannt, der Sinus sein (§. 14). Es ist also

$$\tfrac{1}{2}ab = \sin c = \sin C,$$
$$\tfrac{1}{2}bc = \sin a = \sin A,$$
$$\tfrac{1}{2}ac = \sin b = \sin B,$$

folglich $AB : BC : AC = \sin C : \sin A : \sin B$.

Die Vergleichung der Dreiecke AOB und aOb zeigt ferner,

daß AB : ab = AO : aO oder AB : 2 *sin* C = AO : aO ist, d. h. daß jede Seite des Dreiecks ABC sich zum doppelten Sinus des gegenüberstehenden Winkels verhält, wie der Halbmesser des umschriebenen Kreises zu dem der Tafeln *).

---

*) Man kann auch die Linien ab, bc und ac selbst als die Sinus der Winkel A, B und C ansehen, wenn man den Durchmesser des Kreises abc als Einheit nimmt. Auf diese Weise hat sie Carnot in seiner *Géométrie de position* dargestellt. Dieser Ansicht gemäß wird daselbst ein sehr einfacher und eleganter Beweis des Satzes des eilften §en und der vornehmsten davon abgeleiteten gegeben. Verf. — Diese Begriffe werden auf folgendem Wege vielleicht noch klarer werden. Man beschreibe um das Dreieck ABC, *Fig.* 70, einen Kreis, ziehe den Durchmesser AD, verbinde B mit D und lege EF parallel mit DB. Dann ist in dem rechtwinkligen Dreieck AEF, $sin\ AEF = sin\ D = sin\ C = \frac{AF}{AE} = \frac{AB}{AD}$. Setzt man nun AE, den Halbmesser des umschriebenen Kreises, der Einheit gleich, so ist $sin\ C = AF$ oder $2\ sin\ C = AB$; ist dagegen $AD = 1$, so ist $sin\ C = AB$. Die Seiten des Dreiecks sind mithin, wenn sie in Zahlen ausgedrückt werden, entweder die doppelten Sinus der gegenüberstehenden Winkel, oder die Sinus selbst, je nachdem man den Halbmesser oder den Durchmesser des umschriebenen Kreises zur Einheit annimmt. Um eine Probe von dem Gebrauch zu geben, den Carnot in seiner *Géométrie de position* von dem Satze macht, daß die Seiten eines Dreiecks die Sinus der gegenüberstehenden Winkel sind, wenn man den Durchmesser des umschriebenen Kreises = 1 setzt, will ich hier zeigen, wie er mit Hülfe desselben die Formel für $sin\ (a + b)$ entwickelt. Es sei, *Fig.* 71, $LAM = a$, $MAN = b$ und $a > b$. Aus einem willkürlichen Punkt E des gemeinschaftlichen Schenkels AM errichte man über demselben BC senkrecht uud lege um das Dreieck ABC einen Kreis, dessen Durchmesser für die Einheit gelten soll. Dann ist $BD = sin\ a$, $DC = sin\ b$, $AB = sin\ ACB = cos\ b$, $AC = sin\ ABC = cos\ a$. Nun ist $\frac{BE}{AB} = \frac{BE}{cos\ b} = sin\ a$ und $\frac{CE}{AC} = \frac{CE}{cos\ a} = sin\ b$, also $BE = sin\ a\ cos\ b$ und $CE = cos\ a\ sin\ b$. Aber $BC = sin\ BAC = sin\ (a + b)$, mithin $sin\ (a + b) = BE + EC = sin\ a\ cos\ b + cos\ a\ sin\ b$. Uebers.

§. 34.

Bezeichnet man, wie in §. 31, die drei Winkel durch A, B, C und die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten durch a, b, c, *Fig.* 14, so wird man nach dem Vorhergehenden die Proportionen

$$\sin A : \sin B = a : b,$$
$$\sin A : \sin C = a : c,$$
$$\sin B : \sin C = b : c,$$

erhalten, aus welchen sich folgende Gleichungen ergeben:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}, \quad \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}.$$

Vermittelst dieser Proportionen wird man ein Dreieck unmittelbar auflösen können 1) **wenn man zwei Winkel und eine Seite kennt**, weil dann alle Winkel desselben gegeben sind, und daher die gesuchten Seiten nothwendig zweien dieser Winkel gegenüber liegen werden. Wäre z. B. a nebst den beiden Winkeln B und C gegeben, so würde man die Summe dieser Winkel von zwei Rechten abziehen, um den Winkel A zu erhalten, und dann aus den beiden ersten Proportionen die gesuchten Seiten b und c bestimmen können. 2) **Wenn man einen Winkel und zwei Seiten hat, von denen eine dem gegebenen Winkel gegenübersteht.** Hätte man z. B. den Winkel A nebst den beiden Seiten a und b, so könnte man den Winkel B nach der ersten Proportion berechnen, und da man alsdann zwei Winkel kennt, so hat man wieder den vorhergehenden Fall *).

---

*) Die gegebenen Stücke können im zweiten Fall so genommen werden, daß gar kein Dreieck daraus construirt werden kann. So ist aus c, b und B kein Dreieck möglich, wenn b kleiner als die Senkrechte ist, die von A auf a gefällt wird. Das Unmögliche, welches etwa in der Voraussetzung liegt, giebt sich bei der Rechnung dadurch zu erkennen, daß man für *sin* C aus $\frac{c \sin B}{b}$ einen Werth erhält, welcher die Einheit übersteigt. Uebrigens weiß man aus der Elementargeometrie, daß das Dreieck nur dann bestimmt

Es giebt zwei Fälle, welche, da sie unter keinen der beiden eben betrachteten begriffen sind, dieser Methode nicht unterworfen zu sein scheinen. Dies sind diejenigen, wo man zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel oder alle drei Seiten kennt. Hiermit werden wir uns jetzt beschäftigen.

§. 35.

Wir wollen zuerst annehmen, man kenne die beiden Seiten a und b und den eingeschlossenen Winkel C. Wenn man die Gleichungen

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}, \quad \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}$$

unter die Form $a \sin C = c \sin A$,

$$b \sin C = c \sin B$$

bringt, und sie Glied für Glied erst addirt und dann von einander subtrahirt, so erhält man

$$(a + b) \sin C = c (\sin A + \sin B),$$
$$(a - b) \sin C = c (\sin A - \sin B).$$

Dividirt man ferner die letzte Gleichung durch die erste, so verschwindet die unbekannte Seite c, und man hat

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}.$$

Nun hat man gesehen (§. 27) daß

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{tg \frac{1}{2} (A - B)}{tg \frac{1}{2} (A + B)}$$

ist; es wird also

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{tg \frac{1}{2} (A - B)}{tg \frac{1}{2} (A + B)}$$

sein *), woraus die Proportion

---

ist, wenn b > c angenommen wird. Ist b < c, so muß noch die Beschaffenheit des Winkels C bekannt sein; denn $\sin C$, das vierte Glied der Proportion, entscheidet hierüber nicht. Uebers.

*) Noch kürzer: aus der Proportion $a : b = \sin A : \sin B$

$$a + b : a - b = tg\,\tfrac{1}{2}(A + B) : tg\,\tfrac{1}{2}(A - B)$$

folgt, oder in Worten: die Summe zweier Seiten eines Dreiecks verhält sich zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe der diesen Seiten gegenüberstehenden Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz *).

In dieser Proportion ist außer A — B alles bekannt. Zieht man nämlich C von zwei Rechten ab, so erhält man A + B, und nimmt man dann $tg\,\tfrac{1}{2}(A + B)$, so findet man

$$tg\,\tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b} \times tg\,\tfrac{1}{2}(A + B).$$

Da man alsdann die Winkel $\tfrac{1}{2}(A + B)$ und $\tfrac{1}{2}(A - B)$ kennt, so erhält man durch Addition

$$\tfrac{1}{2}(A + B) + \tfrac{1}{2}(A - B) = A,$$

und durch Subtraktion des letzten vom ersten

$$\tfrac{1}{2}(A + B) - \tfrac{1}{2}(A - B) = B,$$

d. h. man erhält den größern Winkel, wenn man zur halben Summe den halben Unterschied addirt, und den kleinern, wenn man von ihrer halben Summe den halben Unterschied abzieht.

Nachdem man alle Winkel berechnet hat, findet man die dritte Seite nach §. 32.

§. 36.

Man kann auch unmittelbar die dritte Seite finden, wenn man auf eine der gegebenen Seiten eine senkrechte Linie fällt, z. B. von B auf AC, *Fig.* 13. Nach einer bekannten Ei-

---

(§. 32) folgt

$$a + b : a - b = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B,$$

und hieraus weiter (§. 28)

$$a + b : a - b = tg\,\tfrac{1}{2}(A + B) : tg\,\tfrac{1}{2}(A - B).$$ Verf.

*) Dieser Satz läßt sich auch mit Hülfe einer leichten Construction darthun. Uebers.

genschaft der schiefwinkligen Dreiecke hat man $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \mp 2\,AC \times DC$, wo das obere Zeichen gilt, wenn die Senkrechte innerhalb des Dreiecks fällt, und das untere, wenn der Winkel C stumpf ist, also die Senkrechte außerhalb liegt. Ferner ist in dem rechtwinkligen Dreieck BDC (§. 30)

$$DC = BC \times \sin DBC = BC \times \cos C,$$

wenn man $R = 1$ setzt; mithin ist

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AC \times BC \times \cos C$$

und $AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AC \times BC \times \cos C}$,

oder nach der angenommenen Bezeichnung

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C},$$

eine Formel, welche aus den beiden Seiten a und b und dem eingeschlossenen Winkel C die Seite c giebt. Ein einziges Zeichen ist hier für das Glied $2\,ab \cos C$ hinreichend, weil, wenn der Winkel C stumpf wird, sein Cosinus negativ ist (§. 23), das Zeichen — sich also in + verwandelt, wie es die geometrische Construction erfordert.

§. 37.

Diese Formel ist für den Gebrauch der Logarithmen nicht bequem. Da aber $\cos 2\,C = 1 - 2 \sin C^2$ ist (§. 27), so hat man, wenn man $\frac{1}{2}C$ statt C schreibt,

$$\cos C = 1 - 2\,(\sin \tfrac{1}{2}C)^2,$$

und durch diese Umformung erhält man

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ab + 4\,ab\,(\sin \tfrac{1}{2}C)^2}$$
$$= \sqrt{(a - b)^2 + 4\,ab\,(\sin \tfrac{1}{2}C)^2}.$$

Setzt man nun $\frac{2 \sin \frac{1}{2}C}{a - b}\sqrt{ab} = tg\,\alpha$, so entsteht

$$c = (a - b)\sqrt{1 + tg\,\alpha^2} = \frac{a - b}{\cos \alpha}$$

weil $\cos \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + tg\,\alpha^2}}$ (§. 29).

Man kann nun vermittelst der ersten Formel leicht $tg\ \alpha$ berechnen, und nachdem man den Winkel α gefunden hat, erhält man durch die zweite

$$c = \frac{a - b}{cos\ \alpha}\text{*)}.$$

§. 38.

Die Gleichung $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ C}$ giebt auch den Winkel C aus den drei Seiten a, b und c. Erhebt man nämlich zuvörderst jeden Theil derselben zum Quadrat, so erhält man

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\ cos\ C$$

und hieraus

$$cos\ C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

welcher Ausdruck jedoch für die Rechnung mit Logarithmen nicht bequem ist. Man schreibe deßhalb $2C'$ statt C und $1 - 2\ sin\ C'^2$ statt $cos\ 2C'$ (§. 27), so hat man

$$2\ sin\ C'^2 = 1 + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab} = \frac{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab}{2ab}$$

$$= \frac{c^2 - (a - b)^2}{2ab} = \frac{(c + a - b)(c - a + b)}{2ab},$$

folglich

$$sin\ C'^2 = \frac{(c + a - b)(c - a + b)}{4ab}.$$

---

*) Man hat also $lg\ tg\ \alpha = lg\ 2 + lg\ sin\ \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}lg\ a + \frac{1}{2}lg\ b - lg\ (a - b)$ und $lg\ c = 10 + lg\ (a - b) - lg\ cos\ \alpha$. Da $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$ eben so wohl $a - b$ als $b - a$ genommen werden kann, so ist es gleichgültig, ob man $c = \frac{a - b}{cos\ \alpha}$ oder $c = \frac{b - a}{cos\ \alpha}$ setzt. Ist C stumpf, so ist $c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\ cos\ C}$. Dann ist aber $cos\ C = 2\ (sin\ \frac{1}{2}C)^2 - 1$, und man hat wieder

$$c = \frac{a - b}{cos\ \alpha} \text{ oder } c = \frac{b - a}{cos\ \alpha}.$$

Uebers.

$$= \frac{\frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{c-a+b}{2}}{ab}.$$

Es ist aber leicht einzusehen, daß

$$\frac{c+a-b}{2} = \frac{c+a+b}{2} - b$$

und $\frac{c-a+b}{2} = \frac{c+a+b}{2} - a$

ist; setzt man nun $c + a + b = s$, zieht auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus und schreibt $\frac{1}{2}$ C statt C′, so erhält man

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2} s - a)(\frac{1}{2} s - b)}{ab}},$$

welche Formel folgende Regel enthält:

um einen Winkel eines Dreiecks zu finden, dessen drei Seiten bekannt sind, ziehe man von der halben Summe der drei Seiten jede der den gesuchten Winkel einschließenden Seiten ab, und multiplicire beide Reste in einander; dann dividire man dieses Produkt durch das Produkt der den gesuchten Winkel einschließenden Seiten und nehme aus dem Quotienten die Quadratwurzel. Diese Wurzel wird den Sinus der Hälfte des gesuchten Winkels geben *).

§. 39.

Die Auflösung aller bei den schiefwinkligen Dreiecken vorkommenden Fälle hängt, wie man sieht, von den drei in §. 32, 35 und 38 aufgestellten Regeln ab, und beruht auf eben dem Princip, aus welchem die Auflösung der rechtwinkligen hergeleitet worden ist (§. 30). Es wird daher leicht sein, diese Regeln zu behalten, und die Durchrechnung der Exempel, welche ich hier geben werde, wird hoffentlich den Leser in den Stand setzen, sie anzuwenden.

---

*) Man vergl. die Anmerkung *B* am Schluß des Werkes. Verf.

Beispiele zur Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke.

1) Es sei in dem rechtwinkligen Dreieck ABC, *Fig.* 12, aus der Hypotenuse a und der Kathete c der der letzteren gegenüberstehende Winkel C zu finden, und es sei a = $13^m,178$ und c = $7^m,357$ *). Um nun *sin* C zu bestimmen, muß man folgende Proportion ansetzen (§. 31):

$$a : c = R : sin\ C,$$

woraus folgt

$$sin\ C = \frac{R \times c}{a},$$

und, wenn man die Logarithmen nimmt,

$$lg\ sin\ C = lg\ R + lg\ c - lg\ a.$$

Größerer Einfachheit wegen setzt man fast immer den Halbmesser der Einheit gleich; der Logarithme desselben ist dann Null, so daß er bei der Rechnung nicht in Betracht kommt. Statt der zu verrichtenden Subtraction addirt man die dekadischen Ergänzungen, deren Theorie ich am Schluß meiner Anfangsgründe der Algebra entwickelt habe **). Die Rechnung ist hiernach:

---

*) Es werden hier Meter gemeint. Der Meter, die Einheit des neuen französischen Längenmaaßes, hält 443,295936 Linien des alten. Da nun der Pariser Fuß sich zum preußischen wie 14400 : 13913 verhält, so gehen auf den Meter nach preußischem Maaße 458,812727 Linien oder 3 Fuß 2 Zoll 2,8 Linien. Uebers.

**) Die dekadische Ergänzung einer Zahl ist ihre Ergänzung zur nächst höhern Potenz von 10. So ist 6 die dek Erg. von 4; 31 von 69; 0,7163479 von 9,2836521. Sie wird gefunden, wenn man von der Linken zur Rechten alle Ziffern von 9 und die letzte bedeutende von 10 abzieht. Man überzeugt sich leicht, daß man, statt eine Zahl abzuziehen, ihre dekadische Ergänzung addiren könne, wenn man nur aus der Summe die nächst höhere Potenz von 10 wegläßt. So ist A — 9,2836521 = A — (10 — 0,7163479) = A + 0,7163479 — 10. Hat man x = *lg* 74256 + *lg* 2045 + *lg* 0,00347 — *lg* 2,56 — *lg* 203,47 zu suchen, so kommt die Rechnung mit den dekadischen Ergänzungen der Logarithmen, die sich leicht aus den Tafeln abschreiben lassen, also zu stehen:

$$lg\ c = lg\ 7{,}357 = 0{,}8667008$$
$$\text{d. E. } lg\ a = \text{d. E. } lg\ 13{,}178 = \underline{8{,}8801505}$$
$$lg\ sin\ C = 9{,}7468513$$
$$= lg\ sin\ 0^q{,}377 = lg\ sin\ 33^\circ 56'$$

2) Wenn man die Hypotenuse $a = 33^m{,}253$ und den Winkel $C = 0^q{,}5837$ kennt, und die Seite b sucht, so wird man haben (§. 31)

$$R : sin\ B = R : cos\ C = a : b,$$

folglich

$$b = \frac{a \times cos\ C}{R},$$

$$\text{und } lg\ b = lg\ a + lg\ cos\ C - lg\ R.$$

Nun ist $lg\ a = lg\ 33{,}253 = 1{,}5218308$
$$lg\ cos\ C = lg\ cos\ 0^q{,}5837 = \underline{9{,}7841210}$$
$$lg\ b = 1{,}3059518$$

Dieser Logarithme entspricht in den Tafeln der Zahl $20^m{,}228$, die noch nicht um ein Tausendtel von der Wahrheit abweicht.

3) Kennt man die Seite $c = 5^m{,}391$, den Winkel $B = 0^q{,}3502$ und sucht die Seite b, so hat man

$$R : tg\ B = c : b,$$

also $$b = \frac{c \times tg\ B}{R},$$

und $$lg\ b = lg\ c + lg\ tg\ B - lg\ R.$$

Nun ist $lg\ c = lg\ 5{,}391 = 0{,}7316693$
$$lg\ tg\ B = lg\ tg\ 0^q{,}3502 = \underline{9{,}7876255}$$
$$lg\ b = 0{,}5192948$$

$$lg\ 74256 = 4{,}8707316$$
$$lg\ 2045 = 3{,}3106933$$
$$lg\ 0{,}00347 = 0{,}5403295 - 3$$
$$\text{d. E. } lg\ 2{,}56 = 9{,}5917600$$
$$\text{d. E. } lg\ 203{,}47 = \underline{7{,}6914996}$$
$$\text{Summe } 23{,}0050140$$

Da zwei dekadische Ergänzungen gebraucht sind, so ist aus der Kennziffer des gefundenen Logarithmen zwei mal 10 wegzulassen, mithin $x = 3{,}0050140 = lg\ 1011{,}612$. Die französischen Mathematiker bedienen sich der dekadischen Ergänzungen häufiger, als die deutschen. Uebers.

Dieser Logarithme gehört nach den Tafeln der Zahl 3,306 an. Mithin ist b = $3^m,306$.

Beispiele zur Auflösung der schiefwinkligen Dreiecke.

1) In dem Dreieck ABC, *Fig.* 14, soll die Seite c nebst den Winkeln A und B bekannt und die Seite b zu suchen sein. Es sei A = $1^q,2805$, B = $0^q,5879$ und c = $27^m,348$. Der Winkel C ist $2^q - (A + B) = 2^q - 1^q,8684 = 0^q,1316$, und man hat (§. 32)

$$sin\ C : sin\ B = c : b$$

$$\text{also}\quad b = \frac{c \times sin\, B}{sin\ C},$$

$$\text{und}\quad lg\ b = lg\ c + lg\ sin\ B - lg\ sin\ C.$$

Es ist aber $lg\ c = lg\ 27,348 = 1,4369256$

$lg\ sin\ B = lg\ sin\ 0^q,5879 = 9,9018394$

d. C. $lg\ sin\ C$ = d. C. $lg\ sin\ 0^q,1316 = 0,6877217$

$lg\ b = 2,0264867$

$= lg\ 106,289$; mithin b = $106^m,289$.

2) Man kenne im Dreieck ABC die beiden Seiten a und b nebst dem eingeschlossenen Winkel C, und es soll die dritte Seite c gefunden werden. Es sei a = $28^m,442$, b = $17^m,803$, C = $0^q,8426$. Zuvörderst hat man (§. 35)

$$a + b : a - b = tg\ \frac{A + B}{2} : tg\ \frac{A - B}{2},$$

woraus folgt

$$tg\ \frac{A - B}{2} = \frac{\left(tg\ \frac{A + B}{2}\right)(a - b)}{a + b},$$

und $lg\ tg\ \frac{A - B}{2} = lg\ tg\ \frac{A + B}{2} + lg\ (a - b) - lg\ (a + b)$. Nun ist $A + B = 2^q - C = 2^q - 0^q,8426 = 1^q,1574$, und $\frac{A + B}{2} = 0^q,5787$;

$$a + b = 28,442 + 17,803 = 46,245$$

$$a - b = 28,442 - 17,803 = 10,639.$$

$$lg\ tg\ \frac{A+B}{2} = lg\ tg\ 0,5787 = 10,1084874$$

$$lg\ (a-b) = lg\ 10,639 = 1,0269008$$

$$\text{d. E.}\ lg\ (a+b) = \text{d. E.}\ lg\ 46,245 = \underline{8,3349352}$$

$$lg\ tg\ \frac{A-B}{2} = 9,4703234 = lg\ tg\ 0^q,1828.$$

$$\text{Also}\ \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = A = 0^q,7615$$

$$\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} = B = 0^q,3959.$$

Um nun die Seite c zu bestimmen, hat man die Proportion

$$sin\ B : sin\ C = b : c,$$

$$\text{woraus folgt}\quad c = \frac{b \times sin\ C}{sin\ B}$$

$$\text{und}\ lg\ c = lg\ b + lg\ sin\ C - lg\ sin\ B$$

$$\text{Nun ist}\quad lg\ b = lg\ 17,803 = 1,2504932$$

$$lg\ sin\ C = lg\ sin\ 0^q,8426 = 9,9865885$$

$$\text{d. E.}\ lg\ sin\ B = \text{d. E.}\ lg\ sin\ 0^q,3959 = \underline{0,2346572}$$

$$lg\ c = 1,4717389 = lg\ 29,630,$$

$$\text{mithin}\ c = 29^m,630.$$

3) Man kenne im Dreieck ABC die drei Seiten a, b, c und suche den Winkel A.

Es sei $a = 29^m,037$, $b = 18^m,743$, $c = 13^m,782$. Nach §. 38 addire man die drei Seiten a, b, c, dividire die Summe 61,562 durch 2 und ziehe von dem Quotienten 30,781 nach einander b und c ab. Man findet die Reste 12,038 und 16,999. Dann ist

$$lg\ 16,999 = 1,2304234$$

$$lg\ 12,038 = 1,0805543$$

$$\text{d. E.}\ lg\ 18,743 = 8,7271609$$

$$\text{d. E.}\ lg\ 13,782 = \underline{8,8606878}$$

$$\text{Summe} = 19,8988264$$

$$\text{die Hälfte} = 9,9494132\ ^{*}).$$

Dies ist $lg\ sin\ \frac{1}{2}A = lg\ sin\ 0^q,6987$, mithin $A = 1^q,3974$.

*) Dem Begriff der dekadischen Ergänzung gemäß sollte die Summe eigentlich 19,8988264 — 20

§. 40.

In einem Werke, wie das gegenwärtige, läßt sich unmöglich eine genaue Auseinandersetzung der Anwendungen geben, deren die ebene Trigonometrie fähig ist; ich werde mich also nur darauf beschränken, die Auflösung dreier Aufgaben zu zeigen, die man als die Grundlage der Lehre von der Aufnahme des Terräns ansehn kann.

Die erste ist: **wenn die Größe und Lage einer Linie AB, *Fig.* 15, in einer Ebene gegeben ist, mit Bezug auf sie die Lage eines Punktes C in derselben Ebene zu bestimmen, oder, was einerlei ist, die Abstände AC und BC zu finden.**

Um sie aufzulösen, muß man die Linie AB, die Basis der Operation, und die Winkel CAB und CBA messen, die zwischen dieser Basis und den Linien liegen, welche die Endpunkte derselben mit dem unbekannten Punkte C verbinden; die Abstände AC und BC werden sich hierauf nach §. 32. berechnen lassen, und nachdem man sie gefunden hat, construire man vermittelst eines geometrischen oder verjüngten Maßstabes mit den drei Seiten das Dreieck ABC, welches die gegenseitige Lage der drei Punkte A, B und C darstellen wird *).

---

und die halbe Summe

$$9{,}9494132 - 10 = 0{,}9494132 - 1$$

sein. Da aber von dem Logarithmen eines Sinus die Rede ist, so muß man 9,9494132 schreiben, in welcher Form die Logarithmen der Sinus in den Tafeln erscheinen. Man sieht also, daß es in diesem Fall keiner Berichtigung des Resultats wegen der beiden Ergänzungen bedarf.

Uebers.

*) Ich übergehe ganz das bei der Messung der Winkel zu beobachtende Verfahren, weil der Anblick der dazu erforderlichen Instrumente mehr lehrt, als alles, was sich in dieser Hinsicht sagen läßt, und weil, um die Möglichkeit dieser Messung einzusehn, es hinreichend ist, sich vorzustellen, daß man auf den Punkt A den Mittelpunkt eines Kreisausschnitts gelegt hat, dessen Halbmesser in die Richtung der Schenkel AB und AC des zu messenden Winkels gebracht worden. Diejenigen, welche sich mit der Praxis des Aufnehmens bekannt machen wollen, können den *Traité*

Man wird dann vermittelst der Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks ACP, in welchem die Seite AC und der Winkel CAP bekannt sind, die Länge der auf AB gefällten Senkrechten CP, oder den kleinsten Abstand des Punktes C von AB, und die Größe des Abschnitts AP bestimmen können. Diese beiden Stücke geben die Lage des Punktes C gegen die Linie AB an. Auf eben die Weise findet man die Lage eines zweiten Punktes D, den man zugleich in irgend zweien der drei Punkte A, B und C wahrnehmen kann.

§. 41.

Wenn man den Punkt D unmittelbar mit Bezug auf die Linie AB durch Messung der Winkel DAB und DBA bestimmt hat, so hat man Alles, was erforderlich ist, um den Abstand der Punkte C und D von einander zu finden; denn nachdem man das Dreieck ABD, so wie das Dreieck CAB aufgelöst und den Winkel DAB von dem Winkel CAB abgezogen hat, sind im Dreieck CAD die beiden Seiten AC und AD und der von ihnen eingeschlossene Winkel CAD bekannt, und die Anwendung der Regeln von §. 35. giebt die beiden andern Winkel DCA und CDA, nebst der dritten Seite CD, welche der gesuchte Abstand ist. Der Winkel DCA bestimmt die Lage der Geraden CD, und wenn man AC als schneidende Linie betrachtet, so wird die Vergleichung der Winkel DCA und CAB die Neigung von CD gegen AB zu erkennen geben.

Geht man von den Punkten C und D aus und macht

---

de Trigonométrie von Cagnoli, den Artikel *Levée des plans* im *Dictionnaire des Mathématiques* der *Encyclopédie méthodique*, den *Traité d'Arpentage* von Lefevre und die *Traités de Géodésie* und *de Topographie* von Puissant nachlesen, wo sie die genausten und zweckmäßigsten Methoden sowohl zu den großen trigonometrischen Messungen als zu den Operationen des Details angegeben finden werden. Verf. — Unter den deutschen Werken verdient noch immer J. T. Mayer's gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, in fünf Bänden, rühmliche Erwähnung. Uebers.

CD zu einer neuen Basis, so lassen sich wieder andere Punkte bestimmen, welche man in A und B nicht wahrnehmen konnte; und wenn man so fortfährt, so wird man zur Kenntniß der gegenseitigen Lage aller Punkte eines Landes gelangen. Auf diese Art ist Cassini's Karte von Frankreich entworfen worden.

§. 42.

Die zweite Aufgabe, mit der ich mich beschäftigen werde, ist die allgemeiner genommene erste, indem vorausgesetzt wird, der zu bestimmende Punkt liege außerhalb der durch AB gelegten Projectionsebene. Es sei, *Fig.* 16, C dieser Punkt und ABC′ die Projectionsebene. Die Lage des Punktes C würde bekannt sein, wenn man die des Punktes C′, in welchem die Senkrechte CC′ die Ebene AC′B trifft, und überdies die Länge der Senkrechten kennte, welche angiebt, um wie weit der Punkt C über dem Punkt C′, den man seine Projection nennt, erhaben ist. In diesem Falle sind es nicht die Winkel C′AB und C′BA, welche man mißt, sondern die Winkel CAB und CBA, die in der Ebene ABC liegen, welche durch die Linie AC und BC, die man von A und B nach dem gesuchten Punkte C gezogen hat, gelegt ist. Um die Lage dieser Ebene zu bestimmen, mißt man noch den Winkel DBC, den die Linie BC mit der auf der Ebene ABC′ senkrechten, folglich der CC′ parallel laufenden Linie BD einschließt *). Man löst nun das Dreieck ABC wie das eben so bezeichnete im vorigen §. auf, weil man in beiden einerlei bekannte Stücke hat. Nun kennt man in dem bei C′ rechtwinkligen Dreieck BCC′ die Hypotenuse BC und den Winkel CBC′,

---

*) Wenn es darauf ankommt, Punkte auf der Erdoberfläche zu bestimmen, so wählt man zur Projectionsebene ABC′ eine horizontale Fläche; die Linien C′C und BD sind dann vertikal und werden durch ein Bleiloth gegeben; die Ebene BCC′, welche durch diese Linie geht, ist ebenfalls vertikal, und wird durch den Punkt C, welchen man von B wahrnimmt, und durch die Linie BD bestimmt. Die Linie BC′ ist eine in dieser Ebene liegende Horizontallinie. Verf.

den Unterschied zwischen dem rechten Winkel DBC′ und dem gemessenen Winkel DBC; es werden sich daher die Linien CC′ und BC′ berechnen lassen. Die erste ist die Erhöhung des Punktes C über der Projectionsebene ABC′ und dient in Verbindung mit der Seite AC in dem bei C′ rechtwinkligen Dreieck ACC′ die Seite AC′ zu bestimmen. Nachdem dies geschehn ist, hat man die drei Seiten des Dreiecks ABC′; der Punkt C′ ist mithin bestimmt.

§. 43.

Zu größerer Einfachheit ist hier angenommen worden, daß AB in der Projektionsebene liege. Ist dies nicht der Fall, wie in der 67sten Figur, so muß noch der Winkel DBA gemessen werden, den AB mit der auf der Projektionsebene A′BC′ Senkrechten BD bildet. Man bestimmt nun zuvörderst in dem Dreieck ABC die Seiten AC und BC, und in dem Dreieck BCC′ die Seiten CC′ und BC′. Dann berechnet man in dem bei A′ rechtwinkligen Dreieck AA′B aus AB und ABA′, dem Complement des Winkels DBA, die Seiten BA′ und AA′. Wenn man ferner AC″ mit A′C′ parallel gezogen annimmt, so entsteht das bei C″ rechtwinklige Dreieck ACC″, in welchem man aus der bekannten Seite AC und der ebenfalls bekannten CC″ = CC′ — C′C″ = CC′ — AA′ die Seite AC″ = A′C′ bestimmt. Es ist also nun das Dreieck A′BC′ durch seine drei Seiten bekannt, wie im vorigen §. das Dreieck ABC′.

§. 44.

Man kann auch, wenn man BC und BA willkürlich annimmt, und den vorgezeichneten Gang verfolgt, das Dreieck A′BC′ in der Absicht berechnen, um den Winkel C′BA′ kennen zu lernen, den die Linien BC′ und BA′, die Projectionen der Gesichtslinien BC und BA, auf der Projektionsebene A′BC′ bilden.

Der Winkel C′BA′, den diese Projektionen einschließen, ist der von der geneigten Ebene CBA auf die Projectionsebene A′BC′, die man gewöhnlich horizontal annimmt, reduzirte Winkel CBA. Ich werde in der Folge (§. 62) eine zweite Methode, einen Winkel von einer Ebene auf die andere zu reduciren, kennen lehren. Da aber die beiden Ebenen, von denen die Rede ist, wenig gegen einander geneigt zu sein pflegen, so bedient man sich zu dieser Reduction gewöhnlich weit kürzerer Näherungsmethoden, zu deren Behuf man selbst Tafeln angefertigt hat.

Für jetzt beschränke ich mich auf die Bemerkung, daß, wenn man auch im Punkt A die Winkel EAC und EAB beobachtete, und vermittelst derselben den Winkel CAB auf den Winkel C′A′B reducirte, dann A′B berechnete, indem man AB mit dem Cosinus des Winkels ABA′ oder mit dem Sinus des Winkels DBA multiplicirte, und so unmittelbar die Winkel C′BA′ und C′A′B nebst der Geraden A′B erhielte, die Bestimmung des Punktes C′ die im 40sten §. gelöste Aufgabe sein würde.

Die Reduction auf die Horizontalebene ist nicht die einzige, die man mit den beobachteten Winkeln vorzunehmen hat. Selten kann man sich unmittelbar in die Punkte versetzen, die zu Scheiteln der Winkel gewählt und gewöhnlich Thurmspitzen sind. Daraus entsteht eine nene Reduction, die man die **Reduction der Winkel auf den Mittelpunkt der Station** nennt. Hierüber, wie über alle die feinen Berücksichtigungen, welche die großen trigonometrischen Operationen erfordern, vergleiche man die *Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien* des Hrn. Delambre, und die schon citirten Werke des Hrn. Puissant.

§. 45.

Die dritte Aufgabe, die ich hier aufzulösen habe, ist folgende: **einen Punkt zu bestimmen vermittelst der Winkel, die an ihm von Linien gebildet werden, welche zu**

drei gegebenen Punkten führen. Sie giebt eins der bequemsten Mittel an die Hand, in einen Grundriß oder eine Karte einen Punkt einzutragen, der nicht darin bemerkt ist.

Für den Fall der größten Allgemeinheit gehört sie in die Körperlehre und für diesen habe ich ihre graphische Auflösung in meinem *Complément des Élemens de Géométrie* gegeben. Wenn aber die drei Winkel in Einer Ebene liegen, so ist immer einer derselben die Summe oder der Unterschied der beiden andern, so daß es hinlänglich ist, die letztern zu beobachten, um den ersten daraus zu schließen, und man kann nun die übrigen Fälle auf diesen zurückführen, indem man sich der in §. 62 zu lehrenden Reduction der Winkel auf die Horizontalebene bedient.

Die graphische Auflösung dieses Falls besteht darin, daß man über den Linien AB und AC, welche die drei gegebenen Punkte A, B und C verbinden, *Fig.* 68, zwei Kreisabschnitte beschreibt, welche die Winkel BDA und CDA enthalten, die man an dem Punkt D beobachtet hat. Die Bogen werden sich außer dem Punkt A, der ihnen nach der Construction gemein ist, noch im Punkt D schneiden, der offenbar der verlangte sein wird.

Ich werde mich nicht bei der Betrachtung der verschiedenen Fälle aufhalten, die mit Bezug auf die gegenseitige Lage der gegebenen Punkte A, B, C und des gesuchten D statt finden können; ich bemerke bloß, daß die Summe der beobachteten Winkel BDA und CDA jedesmal zu erkennen giebt, ob D innerhalb oder außerhalb des Dreiecks ABC liegt. Im ersten Fall ist dieselbe größer, im zweiten kleiner als zwei Rechte. Beträgt sie gerade zwei Rechte, so befindet sich der Punkt D in der Linie BC selbst. Die Sache ist zu klar, als daß ich dabei zu verweilen nöthig hätte.

Hier ist eine der Methoden, wie man auf diese Aufgabe die trigonometrische Rechnung anwenden kann. Gegeben sind die Stücke des Dreiecks ABC und die beobachteten Winkel BDA und CDA. Man setze

AB = a, AC = b, BDA = α, CDA = β, BAC = γ, und nehme als unbekannt an

$$ABD = x \text{ und } ACD = y,$$

weil man, wenn diese Winkel gefunden sind, zwei Winkel in jedem der Dreiecke BAD und CAD kennt, mithin alle Stücke derselben berechnen kann (§. 34). Nun ist

$$\sin BDA : \sin ABD = AB : AD,$$
$$\sin CDA : \sin ACD = AC : AD,$$

oder

$$\sin\alpha : \sin x = a : AD = \frac{a \sin x}{\sin\alpha};$$

$$\sin\beta : \sin y = b : AD = \frac{b \sin y}{\sin\beta},$$

man hat also die Gleichung $\frac{a \sin x}{\sin\alpha} = \frac{b \sin y}{\sin\beta}$

oder

$$a \sin\beta \sin x - b \sin\alpha \sin y = 0.$$

Aber in dem Viereck ABDC ist

$$ACD = 4 \text{ Rechten} - ADB - ADC - BAC - ABD,$$

also

$$y = 4 \text{ Rechten} - \alpha - \beta - \gamma - x,$$

und setzen wir zur Abkürzung

$$4 \text{ Rechte} - \alpha - \beta - \gamma = \delta,$$

so haben wir

$$y = \delta - x, \text{ mithin}$$

$$a \sin\beta \sin x - b \sin\alpha (\sin\delta \cos x - \cos\delta \sin x) = 0.$$

Dividirt man durch $\sin x$, so entsteht

$$a \sin\beta - b \sin\alpha \left(\sin\delta \frac{\cos x}{\sin x} - \cos\delta\right) = 0,$$

woraus folgt $\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \frac{a \sin\beta + b \sin\alpha \cos\delta}{b \sin\alpha \sin\delta}$.

Theilt man den Ausdruck zur Rechten des Gleichheitszeichens in zwei Glieder, so hat man

$$\cot x = \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha \sin\delta} + \frac{\cos\delta}{\sin\delta} = \frac{\cos\delta}{\sin\delta}\left[\frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha \cos\delta} + 1\right]$$

$$= \cot\delta \left[\frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha \cos\delta} + 1\right].$$

Die Aufgabe ist also gelöst, da man mit Hülfe des Winkels x den Winkel y findet.

Anmerkung über das Nivelliren.

Es ist nützlich zu erwägen, wie man vermittelst des rechtwinkligen Dreiecks ABA′, *Fig.* 67, im 43sten §. die Höhe AA′ des Punktes A über dem ihm entsprechenden Punkt A′ in der Ebene A′BC′ gefunden hat; denn wenn die Ebene horizontal ist, so ist die Linie AA′ der Unterschied zwischen den Wasserflächen der Punkte A und B.

Die Operation, die diesen Unterschied kennen lehrt, wird das Nivelliren oder Wasserwägen genannt. Sie wird nach verschiedenen Methoden verrichtet nach Verschiedenheit der dazu gebrauchten Werkzeuge und der Entfernung der verglichenen Punkte; der Zweck bleibt aber immer derselbe, nämlich zu bestimmen, um wie viel ein Punkt in vertikaler Richtung oder senkrecht auf der Erdoberfläche höher oder tiefer, als ein anderer liegt. Es giebt besondere Abhandlungen über das Nivelliren, auf die ich den Leser verweise; ich muß aber hier die Bemerkung machen, daß, seitdem man in dem Wiederholungskreise ein tragbares Instrument hat, vermittelst dessen man die Winkel mit der größten Schärfe messen kann, man im Stande ist, wie ich es §. 43 angedeutet habe, unmittelbar den Unterschied der Wasserflächen zweier Punkte durch Messung des Winkels zu finden, den die sie verbindende Grade mit der durch einen von beiden gehenden Vertikallinie bildet.

Ich habe oben die beiden Geraden DB und AA′, *Fig.* 67, unter einander parallel angenommen. Dieser Umstand findet aber für die Vertikallinien bei der Convexität der Erdoberfläche nur in einem kleinen Bezirke statt. Wenn wir dieser Fläche, was der Wahrheit sehr nahe kommt, eine sphärische Krümmung geben, so vereinigen sich die Vertikallinien, wie AC und BC, *Fig.* 72, sämmtlich in ihrem Mittelpunkt C. Die Linie BA′, welche auf BD senkrecht steht, berührt bloß die Erdoberfläche im Punkt B und der Unterschied der Wasserflächen von A und B ist, nach der vorhin gegebenen Erklärung nicht AA′, sondern $A\alpha$, nämlich der Unterschied der Seiten BC und AC des Dreiecks ABC, worin man die gemessene Seite AB, den mittlern Halbmesser BC der Erde von 6366198 Metern, und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel B, das Supplement des beobachteten Winkels DBA, kennt.

Setzt man nun $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, so hat man (§. 36)

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B},$$

und da c in Vergleichung mit a immer sehr klein ist, so gebe ich diesem Ausdruck die Form

$$b = a\left[1 + \frac{c^2 - 2ac \cos B}{a^2}\right]^{\frac{1}{2}} = a\left[1 + \frac{2c}{a}\left(\frac{c}{2a} - \cos B\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Setzen wir, um abzukürzen, $\frac{c}{2a} - \cos B = m$, und entwickeln den Ausdruck nach der binomischen Formel, so entsteht

$$b = a\left[1 + \frac{2cm}{a}\right]^{\frac{1}{2}} = a\left[1 + \frac{cm}{a} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{c^2 m^2}{a^2} + \cdots\right]$$

$$= a + cm - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{c^2 m^2}{a} + \cdots$$

und da die gesuchte Linie $A\alpha$, die ich mit δ bezeichnen will, der Unterschied der Linien b und a ist, so ergiebt sich

$$\delta = cm - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{c^2 m^2}{a} + \cdots$$

Die Größe m und ihre Potenzen lassen sich leicht mit Hülfe der Logarithmen berechnen, wenn man $\frac{c}{2a} = \cos B'$ setzt, weil dann

$$\frac{c}{2a} - \cos B = \cos B' - \cos B = 2 \sin \tfrac{1}{2}(B + B') \sin \tfrac{1}{2}(B - B')$$

ist.

Wenn der Winkel B ein rechter ist, so fällt BA mit BA′ zusammen, und wenn man nun den Punkt α' betrachtet, in welchem sich BA′ und AC schneiden, so ist $c = B\alpha'$ und δ verwandelt sich in $\alpha\alpha'$, d. i. in die Entfernung des Punktes α' der Tangente von dem entsprechenden Punkt α der Erdoberfläche oder in den Unterschied der scheinbaren und wahren Horizontallinie. In diesem Fall ist $m = \frac{c}{2a}$, also

$$\delta = \frac{c^2}{2a} - \frac{c^4}{8a^3} + \cdots$$

welche Formel finden lehrt, um wie viel die Erdoberfläche sich unter die Tangente in einer Entfernung c vom Berührungspunkt vertieft.

Gewöhnlich reducirt man zuerst den Punkt A auf die Tangente BA′ in A′, und betrachtet dann, wegen der Kleinheit des Winkels C, die Geraden AA′ und $A\alpha'$ als zusammenfallend, worauf dann $A\alpha$ die Summe der Geraden AA′ und $\alpha'\alpha$ ist.

Man kann die Messung des Abstandes AB unterlassen, wenn man nur zugleich mit dem Winkel DBA auch den Winkel EAB mißt. Man kennt dann in dem Dreieck ABC die Winkel B und A als Supplemente der gemessenen Winkel, und hat (§. 35)

$$\frac{b - a}{b + a} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(B - A)}{tg\,\frac{1}{2}(B + A)}.$$

Setzt man dann zur Abkürzung $\frac{tg\,\frac{1}{2}(B - A)}{tg\,\frac{1}{2}(B + A)} = m$ und $b = a + \delta$,

so ergiebt sich $\frac{\delta}{2a + \delta} = m$ oder $\delta = \frac{2am}{1 - m}$.

Nun ist $\frac{1}{1 - m} = 1 + m + m^2 + \cdots$ (Algebra §. 235),

mithin $\delta = 2am\,(1 + m + m^2 + \cdots)$,

eine Reihe, die sehr convergent ist, wenn die Winkel A und B sich dem

Rechten nähern. In den meisten Fällen ist das erste Glied $2am$ hinreichend.

Wenn man mit Genauigkeit operirt, so muß man die Winkel EAB und DBA nach den Gesetzen der Refraction verbessern, welche die Lichtstrahlen erleiden, wenn sie von A bis B gehn. Es kam mir aber hier hauptsächlich nur darauf an, ein paar Beispiele von der Anwendung der Reihen auf die genäherte Auflösung gewisser bei den Dreiecken vorkommenden Fälle zu geben.

Zweites Kapitel.

Von der sphärischen Trigonometrie.

§. 46.

Die sphärischen Dreiecke, die man gewöhnlich berechnet, sind diejenigen, welche von drei größten Kreisen auf der Oberfläche der Kugel gebildet werden. Ein solches sphärisches Dreieck bestimmt immer ein körperliches Dreieck (eine dreikantige Ecke), und umgekehrt kann man aus einem körperlichen Dreieck ein sphärisches herleiten. Es sei ABC, *Fig*. 17, irgend ein sphärisches Dreieck, und man habe aus jeder seiner Winkelspitzen nach dem Mittelpunkt der Kugel, von deren Oberfläche es einen Theil ausmacht, die Halbmesser AS, BS und CS gezogen; die Ebenen ABS, ACS und BCS sind die der größten Kreise, auf denen man AB, AC, BC, die Seiten des vorgelegten Dreiecks, genommen hat, und diese Bogen messen die auf jeder Seitenfläche des körperlichen Dreiecks SABC zwischen den Kanten SA und SB, SA und SC, SB und SC enthaltenen Winkel. Die Neigung zweier Ebenen wird, wie bekannt, von dem geradlinigen Winkel gemessen, welchen zwei aus einerlei Punkt des gemeinschaftlichen Durchschnitts auf denselben in jeder dieser Ebenen gezogene senkrechte Linien einschließen. Wenn man daher aus dem Punkt A zwei gerade Linien AI und AK senkrecht auf AS errichtet, von denen die erste in der Ebene ACS und die andere in der Ebene ABS liegt, so wird der geradlinige

Winkel

Winkel IAK die Neigung dieser beiden Ebenen messen. Es ist überdies leicht einzusehen, daß die Linie AI die Tangente des Bogens AC und AK die des Bogens AB sein wird; und da man für den Winkel, welchen zwei krumme Linien einschließen, denjenigen nimmt, welchen die durch ihren Durchschnittspunkt gelegten Tangenten bilden, so wird auch der Winkel IAK das Maaß des von den Bogen AC und AB eingeschlossenen Winkels sein. Dasselbe findet auch bei jedem der beiden anderen Winkel des Dreiecks statt; die Neigungen der Seitenflächen des körperlichen Dreiecks SABC haben demnach mit den correspondirenden Winkeln des sphärischen Dreieckes ABC einerlei Maaß. Das körperliche und das sphärische Dreieck sind folglich aus sechs mit einander correspondirenden Stücken zusammengesetzt; aus den drei Seiten des sphärischen Dreiecks, welche mit den drei Winkeln der Kanten des körperlichen Dreiecks, und aus den drei Winkeln des sphärischen Dreiecks, welche mit den Neigungen der Seitenflächen des körperlichen Dreiecks übereinstimmen.

Euler, welcher sich wiederholentlich mit Untersuchungen über die spärische Trigonometrie beschäftigt hat, um sie unter neuen Gesichtspunkten darzustellen, lieferte im Jahre 1779 eine Abhandlung, welche man als einen vollständigen Lehrbegriff dieses Theils der Mathematik ansehen kann *). Ihre ganz analytische Form hat mich veranlaßt, sie meinen Lesern vorzulegen, indem ich bloß die Aenderungen damit vorgenommen habe, welche nöthig waren, um sie auf ein einziges Princip zu gründen und einige Resultate zu vereinfachen.

---

*) *Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae anni* 1779, *pars prior.* Man vergleiche: *Développement de la partie élémentaire des Mathématiques par Bertrand. Genève,* 1778. (*T. II. pag.* 576) und das zu Wien im Jahre 1820 erschienene Werk von Hestermann, *Trigonometriae sphaericae leges et formulae methodo mere analytica demonstratae.* Verf.

§. 47.

Alles, was ich über die sphärischen Dreiecke sagen werde, beruht auf folgender Construction, die man daher wohl zu fassen hat.

Von dem Winkel C des Dreiecks ABC lasse man auf die Ebene ASB der diesem Winkel gegenüberstehenden Seite AB die Senkrechte CD herab, fälle aus dem Punkt D die Linien DE und DF senkrecht auf SA und SB, und ziehe die Linien CE und CF, welche auf SA und SB senkrecht sein werden. (Geometrie §. 202.) Hieraus folgt, daß die Winkel CED und CFD die Neigungen der Ebenen ACS und BCS gegen die Ebene ABS messen, oder, was dasselbe ist, daß sie die Größe der Winkel A und B des sphärischen Dreiecks ABC angeben. Wir werden in der Folge, eben so wie bei den geradlinigen Dreiecken in §. 31, die Winkel der sphärischen immer durch die an ihren Scheiteln stehenden Buchstaben, und die ihnen gegenüberliegenden Seiten durch die entsprechenden Buchstaben des kleinen Alphabets bezeichnen, also die dem Winkel A gegenüberliegende Seite BC mit a, u. s. f. Wenn nun der Halbmesser der Kugel, wie in den Tafeln, der Einheit gleich gesetzt wird, so erhält man:

$$CE = \sin CA = \sin b, \quad SE = \cos CA = \cos b,$$
$$CF = \sin CB = \sin a, \quad SF = \cos CB = \cos a.$$

Aus dem bei D rechtwinkligen Dreieck CDE, worin der Winkel CED = A ist, findet man:

$$CD = CE \sin CED = \sin b \sin A,$$
$$DE = CE \cos CED = \sin b \cos A.$$

Aus dem Dreieck CDF, welches ebenfalls bei D rechtwinklig, und dessen Winkel CFD = B ist, erhalten wir:

$$CD = CF \sin CFD = \sin a \sin B,$$
$$DF = CF \cos CFD = \sin a \cos B.$$

Vergleicht man die beiden Ausdrücke der Linie CD mit einander, so folgt:

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B \ldots (A),$$

ein Resultat, welches in Beziehung auf die sphärischen Dreiecke mit dem in §. 32 für die geradlinigen gefundenen analog ist *). Auf eben diese Art erhält man die beiden Gleichungen

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C,$$
$$\sin c \sin B = \sin b \sin C.$$

Zieht man nun durch den Punkt E auf SB die Senkrechte EG, und legt durch D die Linie DH parallel mit SB, so wird man das rechtwinklige Dreieck HDE bilden, worin HED = ASB ist, weil, wenn man den Winkel GES von dem rechten SED abzieht, HED zum Rest erhält, und auch ASB oder ESG die Differenz zwischen einem rechten und GES ist. Aus der Auflösung des Dreiecks EHD kann man folglich herleiten:

$HD = DE \sin DEH = DE \sin c = \cos A \sin b \sin c$; aber $SF = \cos a = SG + GF = SG + HD$, und $SG = SE \cos ESG = \cos b \cos c$; man wird folglich haben

$$\cos a = \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c,$$

eine Gleichung, welche die zwischen der Seite a, den beiden übrigen Seiten b und c, und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel A statt findende Relation angiebt.

Offenbar kann man, wenn man jede der beiden letzteren Seiten besonders betrachtet, noch zwei der vorhergehenden ähnliche Gleichungen erhalten, und auf diese Weise zwischen den sechs Stücken des Dreiecks ABC folgende Gleichungen bilden:

$$\left.\begin{array}{l}\cos a = \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c \\ \cos b = \cos a \cos c + \cos B \sin a \sin c \\ \cos c = \cos a \cos b + \cos C \sin a \sin b\end{array}\right\} \ldots (B) \text{ **)}.$$

---

*) Nämlich daß im sphärischen Dreieck sich die Sinus der Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel verhalten. Ist B ein rechter Winkel, so fällt CD in die Ebene CSB, und ist es ein stumpfer, so liegt CD außerhalb des körperlichen Dreiecks SABC, zwei Fälle, die, wie man leicht sieht, der Allgemeinheit des eben aufgestellten Satzes keinen Eintrag thun. Uebers.

**) Diese Gleichungen sind in Bezug auf die sphärischen Dreiecke das

§. 48.

Diese drei Gleichungen begreifen auch die Gleichung (A) in sich. Um sich hievon zu überzeugen, braucht man nur die Werthe von *cos* A, *cos* B und *cos* C daraus zu bestimmen und sie in den Gleichungen

$$\sin A^2 = 1 - \cos A^2,$$
$$\sin B^2 = 1 - \cos B^2,$$
$$\sin C^2 = 1 - \cos C^2$$

zu substituiren. Man findet durch den ersten dieser Werthe:

$$\sin A^2 = 1 - \frac{\cos a^2 - 2\cos a \cos b \cos c + \cos b^2 \cos c^2}{\sin b^2 \sin c^2}$$

$$= \frac{\sin b^2 \sin c^2 - \cos a^2 + 2\cos a \cos b \cos c - \cos b^2 \cos c^2}{\sin b^2 \sin c^2}$$

$$= \frac{(1-\cos b^2)(1-\cos c^2) - \cos b^2 \cos c^2 - \cos a^2 + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin b^2 \sin c^2}$$

$$= \frac{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin b^2 \sin c^2}.$$

Multiplicirt man nun den Zähler und den Nenner dieses Bruchs durch *sin* a^2 und zieht dann auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so wird man erhalten

$$\sin A = \sin a \times \frac{\sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c}$$

Bezeichnet man zur Abkürzung die Größe, welche *sin* a im zweiten Theil dieser Gleichung multiplicirt, durch M, so wird man haben

$$\sin A = M \sin a.$$

---

was für die geradlinigen Dreiecke die Gleichungen, zu denen die in §. 36 entwickelte gehört, welche die zwischen einer Seite, den beiden andern und dem von diesen eingeschlossenen Winkel stattfindende Relation darstellen, und unten in §. 100 auf eine einfachere Gestalt gebracht werden. Man findet in der Anmerk. C am Schluß des Werkes die Angabe einer andern Methode, wie man zu dieser Relation gelangen kann. Verf.

Eben so findet man

$$\sin B = M \sin b,\quad \sin C = M \sin c,$$

und durch die Elimination der Größe M gelangt man zu den Gleichungen (A). Es verdient bemerkt zu werden, daß die drei Seiten a, b und c auf gleiche Weise in dem Ausdruck M vorkommen, und aus dieser Ursache ist er den Werthen der Sinus aller drei Winkel gemein *).

Die Gleichungen (B) werden demnach zur Auflösung eines jeden sphärischen Dreiecks, in welchem drei Stücke bekannt sind, hinreichend sein, wenn man in Erwägung zieht, daß der Sinus und der Cosinus als eine einzige Unbekannte betrachtet werden müssen, weil man immer den einen durch den andern ausdrücken kann.

Die Anwendung der Gleichungen (B) auf die verschiedenen vorkommenden Fälle wird durch einige Umformungen, die ich sogleich vornehmen werde, sehr erleichtert.

§. 49.

Man kann darin die Winkel in die ihnen entgegengesetzten Seiten und umgekehrt verwandeln, wenn man jedem Cosinus das Zeichen — giebt. Um dies zu beweisen, muß man aus den beiden letztern Gleichungen $\cos$ a vermittelst der ersten eliminiren, und man wird erhalten

$$\cos b = \cos b \cos c^2 + \cos A \sin b \sin c \cos c + \cos B \sin a \sin c$$
$$\cos c = \cos b^2 \cos c + \cos A \sin b \sin c \cos b + \cos C \sin a \sin b.$$

---

*) Bezeichnet man den Zähler der Größe M mit N, die drei Kanten eines Tetraeders, welche zu Einer Ecke gehören, mit α, β, γ, und die drei Winkel, welche diese Kanten einschließen, mit a, b, c, so ist nach einer Abhandlung von Euler das Volumen des Tetraeders $= \frac{1}{3}\alpha\beta\gamma \times \frac{1}{2}$ N, wo $\frac{1}{2}$ N auch den Werth

$$\sqrt{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}$$

hat. In dem Tetraeder SABC ist $\alpha = \beta = \gamma = 1$; sein Volumen ist also $\frac{1}{6}$ N. S. *Novi Comment. Acad. Petrop. Tom. IV., pag.* 160 und *Journal de l'École Polytechnique,* sechstes Heft, *pag.* 272. Verf.

Substituirt man nun $1 - \sin c^2$ statt $\cos c^2$ und $1 - \sin b^2$ statt $\cos b^2$, so wird die erste durch $\sin c$, und die andere durch $\sin b$ theilbar, und sie können dann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\left.\begin{array}{l}\cos B \sin a = \cos b \sin c - \cos A \sin b \cos c \\ \cos C \sin a = \sin b \cos c - \cos A \cos b \sin c\end{array}\right\}\ldots(C).$$

Wenn man nun die zweite dieser Gleichungen durch $\cos A$ multiplicirt, sie sodann zur ersten addirt und $1 - \sin A^2$ statt $\cos A^2$ substituirt, so wird man erhalten

$$\sin a (\cos B + \cos A \cos C) = \sin A^2 \cos b \sin c;$$

es folgt aber aus den Gleichungen (A), daß $\sin c \sin A = \sin a \sin C$; substituirt man diesen Werth in dem zweiten Theil der obigen Gleichung, so wird sie durch $\sin a$ theilbar werden und man wird zum Resultat erhalten

$$\cos B + \cos A \cos C = \cos b \sin A \sin C,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\cos B = - \cos A \cos C + \cos b \sin A \sin C.$$

Hält man diese Gleichung gegen die Gleichungen (B), so sieht man, daß sie sich unmittelbar aus der zweiten herleiten läßt, wenn man die großen Buchstaben in die kleinen und umgekehrt verwandelt, und jedem Cosinus das Zeichen — giebt. In der That erhält man, wenn man auf diese Art verfährt,

$$- \cos B = \cos A \cos C - \cos b \sin A \sin C,$$

eine Gleichung, welche in die vorhergehende übergeht, wenn man alle Zeichen ändert.

Dieselbe Relation, welche sich hier zwischen dem Winkel B und den beiden Winkeln A und C nebst der von ihnen eingeschlossenen Seite b ergeben hat, findet offenbar bei jeder ähnlichen Verbindung von Winkeln und Seiten statt; mithin hat man folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\cos A = - \cos B \cos C + \cos a \sin B \sin C \\ \cos B = - \cos A \cos C + \cos b \sin A \sin C \\ \cos C = - \cos A \cos B + \cos c \sin A \sin B\end{array}\right\}\ldots(B').$$

§. 50.

Es ist zu bemerken, daß man, indem man die Cosinus negativ nimmt, von den Bogen a, b, c und von den Winkeln A, B, C zu deren Supplementen übergeht, weil $-\cos A = \cos (2^q - A)$, $-\cos a = \cos (2^q - a)$ u. s. w. ist (§. 23). Wenn man diese Werthe in die obigen Gleichungen setzt und zur Abkürzung A' statt $2^q - A$, a' statt $2^q - a$ u. s. w. schreibt, so werden sie folgende Form annehmen:

$$\left.\begin{array}{l} \cos A' = \cos B' \cos C' + \cos a' \sin B' \sin C' \\ \cos B' = \cos A' \cos C' + \cos b' \sin A' \sin C' \\ \cos C' = \cos A' \cos B' + \cos c' \sin A' \sin B', \end{array}\right\}$$

welche Gleichungen den Gleichungen (B) völlig ähnlich sind, folglich zu einem sphärischen Dreieck gehören, dessen Seiten A', B', C' und dessen Winkel a', b', c' sind *). Die Winkel eines solchen Dreiecks werden also durch die Supplemente der Seiten des Dreiecks ABC gemessen, und seine Seiten messen die Supplemente der Winkel eben dieses Dreiecks. Es kommt in den Lehrbüchern der Trigonometrie unter dem Namen des **Polardreiecks** vor, und man beweist, daß die Scheitel seiner Winkel die Pole der Seiten des ersten sind, und umgekehrt **).

---

*) Herr J. Binet hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß man auf einem noch einfacheren Wege zur völligen Uebereinstimmung der Gleichungen (B) und (B') gelangen kann, indem man gleichzeitig in beiden an die Stelle der Winkel des sphärischen Dreiecks deren Supplemente setzt. Dann gehen die Gleichungen (B) über in

$$\cos a = \cos b \cos c - \cos A' \sin b \sin c,$$

u. s. w., und die Gleichungen (B') in

$$\cos A' = \cos B' \cos C' - \cos a \sin B' \sin C'$$

Verf.

**) Die Betrachtung dieses Polardreiecks giebt die Gränze für die Summe der Winkel in den sphärischen Dreiecken, welche nicht, wie bei den geradlinigen, constant ist. Da nehmlich die Summe der Winkel eines beliebigen sphärischen Dreiecks und der Seiten des zugehörigen Polardreiecks allemal sechs Rechte giebt, so wird man, wenn man von sechs Rechten die

§. 51.

Die im 49sten §. entwickelten, mit (C) bezeichneten Gleichungen, welche fünf Stücke des sphärischen Dreiecks ABC enthalten, können in andere umgeformt werden, in denen nur vier derselben vorkommen. Man muß zu diesem Ende statt *sin* a

---

Summe der Seiten des Polardreiecks abzieht, die immer kleiner als vier Rechte (Geom. §. 291) und natürlich immer größer als 0 ist, mehr als zwei Rechte und weniger als sechs Rechte für die Summe der Winkel des sphärischen Dreiecks erhalten. Verf. — Für diejenigen Leser, welche die sphärische Trigonometrie zuerst nach diesem Lehrbuche studiren, wird eine Erläuterung über das Polardreieck hier nicht am unrechten Ort stehen. Ich setze dabei die Lehre von den Kugelschnitten als bekannt voraus. Es sei, *Fig.* 73, DEF ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten und Winkel wir auf die gewöhnliche Weise mit a, b, c und A, B, C bezeichnen wollen. Verlängert man alle drei Seiten, von denen jede kleiner als ein Quadrant sein mag, über beide Endpunkte hinaus so weit, daß FG = FH = DI = DK = EL = EM = 1^q werde, und legt durch die Punkte G und H, I und K, L und M Bogen größter Kreise, so entsteht das Dreieck NOP, dessen Winkel mit a′, b′, c′ und dessen Seiten mit A′, B′, C′ bezeichnet werden mögen. Die Dreiecke DEF und NOP stehen nun in folgender Beziehung zu einander. Da DI und DK Quadranten sind, so ist D der Pol von OP oder A′. Eben so ist E der Pol von B′ und F der Pol von C′. Da ferner E der Pol von NP und F der von NO ist, so sind NE und NF Quadranten, mithin ist N der Pol von EF oder a. Eben so ist O der Pol von b und P der Pol von c. Man sieht, daß die Scheitel des einen Dreiecks die Pole der Seiten des andern sind. Man nennt daher jedes dieser Dreiecke das Polardreieck mit Bezug auf das andere. Nun ist OK + IP = OP + IK = A′ + IK = 2^q. Aber IK ist das Maaß von A; mithin ist A′ = 2^q — A. Eben so ist B′ = 2^q — B und C′ = 2^q — C. Ferner ist HF + EL = HL + EF = HL + a = 2^q. Aber HL ist das Maaß von a′; mithin ist a′ = 2^q — a. Eben so ist b′ = 2^q — b und c′ = 2^q — c. Man sieht demnach, daß die Seiten des einen Dreiecks die Supplemente der Winkel des andern und die Winkel des einen die Supplemente der Seiten des andern sind. Für den Fall, daß nicht sämmtliche Seiten des Dreiecks DEF kleiner als Quadranten sind, muß ich es dem Leser überlassen, das Polardreieck zu construiren. Aber in jedem Fall giebt es ein Dreieck auf der Kugeloberfläche, das zu einem gegebenen, wie auch dessen Seiten beschaffen sein mögen, in der hier beschriebenen Relation steht.

Uebers.

in die erste $\frac{\sin b \sin A}{\sin B}$ und in die andere $\frac{\sin c \sin A}{\sin C}$ setzen (§. 47), und da $\frac{\cos p}{\sin p} = \cot p$, so wird man finden

$$\left.\begin{aligned} \cot B &= \frac{\cos b \sin c - \cos A \sin b \cos c}{\sin A \sin b} \\ \cot C &= \frac{\sin b \cos c - \cos A \cos b \sin c}{\sin A \sin c} \end{aligned}\right\} \ldots (D).$$

Es ist leicht, vermittelst des bloßen Anblicks dieser Werthe alle diejenigen zu bilden, welche ihnen analog sind, wenn man darin die Buchstaben auf die gehörige Weise vertauscht. Aber vorzüglich ist hier zu bemerken, daß man in denselben, weil sie aus den Gleichungen (B) abgeleitet sind, auf dieselbe Art, wie in diesen, die Seiten in Winkel und umgekehrt verwandeln kann, wenn man den Cotangenten und Cosinus das entgegengesetzte Zeichen giebt. Es wird dann entstehn:

$$\left.\begin{aligned} \cot b &= \frac{\cos B \sin C + \cos a \sin B \cos C}{\sin a \sin B} \\ \cot c &= \frac{\sin B \cos C + \cos a \cos B \sin C}{\sin a \sin C} \end{aligned}\right\} \ldots (D').$$

§. 52.

Die fünf Systeme von Gleichungen (A), (B), (B'), (D), (D') geben unmittelbar die Auflösung aller Fälle, welche bei einem sphärischen Dreieck vorkommen können. Das erste drückt die Relation aus, welche zwischen den Winkeln und den ihnen gegenüberstehenden Seiten statt findet.

§. 53.

Aus dem zweiten zieht man folgende sechs Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \cos A \sin b \sin c \\ \cos b &= \cos a \cos c + \cos B \sin a \sin c \\ \cos c &= \cos a \cos b + \cos C \sin a \sin b \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}\\ \cos C &= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}\end{aligned}\right\}$$

von denen die drei ersten eine Seite vermittelst der beiden andern und des von ihnen eingeschlossenen Winkels, und die drei letzten die Winkel vermittelst der Seiten finden lehren.

§. 54.

Das dritte System giebt, eben so wie das vorhergehende, sechs Formeln, nämlich

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a\\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b\\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}\\ \cos b &= \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}\\ \cos c &= \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}\end{aligned}\right\}$$

Die drei ersten lehren einen Winkel aus den beiden andern und der zwischen ihnen liegenden Seite, und die drei letzten jede Seite vermittelst der drei Winkel finden.

§. 55.

Das vierte System giebt, wenn man darin alle mögliche Versetzungen macht, folgende sechs Formeln:

$$\cot A = \frac{\cos a \sin b - \cos C \sin a \cos b}{\sin C \sin a}$$

$$\cot B = \frac{\sin a \cos b - \cos C \cos a \sin b}{\sin C \sin b}$$

$$cot\ A = \frac{cos\ a\ sin\ c - cos\ B\ sin\ a\ cos\ c}{sin\ B\ sin\ a}$$

$$cot\ C = \frac{sin\ a\ cos\ c - cos\ B\ cos\ a\ sin\ c}{sin\ B\ sin\ c}$$

$$cot\ B = \frac{cos\ b\ sin\ c - cos\ A\ sin\ b\ cos\ c}{sin\ A\ sin\ b}$$

$$cot\ C = \frac{sin\ b\ cos\ c - cos\ A\ cos\ b\ sin\ c}{sin\ A\ sin\ c},$$

vermittelst welcher man zwei Winkel eines sphärischen Dreiecks bestimmen kann, wenn der dritte Winkel und die ihn einschließenden Seiten bekannt sind.

§. 56.

Das fünfte System endlich führt auf folgende sechs Formeln:

$$cot\ a = \frac{cos\ A\ sin\ B + cos\ c\ sin\ A\ cos\ B}{sin\ c\ sin\ A}$$

$$cot\ b = \frac{sin\ A\ cos\ B + cos\ c\ cos\ A\ sin\ B}{sin\ c\ sin\ B}$$

$$cot\ a = \frac{cos\ A\ sin\ C + cos\ b\ sin\ A\ cos\ C}{sin\ b\ sin\ A}$$

$$cot\ c = \frac{sin\ A\ cos\ C + cos\ b\ cos\ A\ sin\ C}{sin\ b\ sin\ C}$$

$$cot\ b = \frac{cos\ B\ sin\ C + cos\ a\ sin\ B\ cos\ C}{sin\ a\ sin\ B}$$

$$cot\ c = \frac{sin\ B\ cos\ C + cos\ a\ cos\ B\ sin\ C}{sin\ a\ sin\ C},$$

welche dienen, zwei Seiten eines Dreiecks zu bestimmen, wenn man die dritte nebst den anliegenden Winkeln kennt.

§. 57.

Die Formeln, die aus den Systemen (B), (B′), (D) und (D′) (§. 53 – 56) abgeleitet worden sind, verdienen die größte Aufmerksamkeit, sowohl wegen ihrer Eleganz, als wegen der

Eigenschaft, daß sie zu erkennen geben, ob der Bogen oder Winkel, welchen sie jedesmal ausdrücken, kleiner oder größer als ein Quadrant oder rechter Winkel ist, eine Eigenschaft, welche die Ausdrücke für die Sinus eben dieser Bogen nicht haben würden. Denn da der Sinus eines Bogens mit dem seines Supplements sowohl in Ansehung der Größe als des Zeichens übereinkommt, so wird man, so oft man nur den Sinus eines Bogens kennt, nicht wissen können, ob dieser Bogen kleiner oder größer als ein Quadrant zu nehmen ist. Kennt man hingegen den Cosinus oder die Tangente oder die Cotangente, und weiß außerdem, daß dieser Bogen allemal kleiner als der halbe Umkreis ist, wie dies bei den Seiten der sphärischen Dreiecke und und den ihre Winkel messenden Bogen der Fall ist, so ersieht man aus dem Zeichen des Resultats, ob der gesuchte Bogen zwischen 1^q und 2^q enthalten ist, oder nicht, weil im ersten Fall der Cosinus, die Tangente und die Cotangente das Zeichen —, im zweiten das Zeichen + haben. Wenn man demnach den bekannten Größen in den angeführten Formeln die Zeichen gegeben hat, welche sie nach dem Werth der Bogen, zu denen sie gehören, erhalten müssen, so wird das Zeichen des Resultats die Art der gesuchten Seite oder des gesuchten Winkels zu erkennen geben, das heißt, ob sie kleiner oder größer als ein Quadrant, oder ob sie spitz oder stumpf sind.

§. 58.

Eben diese Formeln lassen sich sehr vereinfachen, wenn das vorgelegte Dreieck rechtwinklig, d. i. einer seiner Winkel ein rechter ist. Wirklich hat man, wenn $C = 1^q$ genommen wird,

$$\sin C = 1, \cos C = 0,$$

und es entsteht;

$$\cos c = \cos a \cos b \quad (\S.\ 53)$$

$$\cos c = \frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B} = \cot A \cot B \quad (\S.\ 54)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \sin B \cos a \\ \cos B &= \sin A \cos b \end{aligned}\right\} (\S.\ 54)$$

$$\sin a = \sin c \sin A,\ \sin b = \sin c \sin B\ (\S.\ 47)$$

$$\left.\begin{aligned} \cot b &= \frac{\cos B}{\sin a \sin B} \\ \cot a &= \frac{\cos A}{\sin b \sin A} \\ \cot c &= \frac{\cos b \cos A}{\sin b} \\ \cot c &= \frac{\cos a \cos B}{\sin a} \end{aligned}\right\} \text{(§. 56), woraus folgt} \left\{\begin{aligned} tg\, b &= \sin a\, tg\, B \\ tg\, a &= \sin b\, tg\, A \\ tg\, b &= \cos A\, tg\, c \\ tg\, a &= \cos B\, tg\, c \end{aligned}\right.$$

und wenn man von diesen Formeln nur diejenigen nimmt, welche wesentlich verschieden sind, so wird man folgende sechs Formeln erhalten:

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b \\ \cos c &= \cot A \cot B \\ \sin a &= \sin c \sin A \\ tg\, a &= \sin b\, tg\, A \\ tg\, a &= \cos B\, tg\, c \\ \cos A &= \sin B \cos a, \end{aligned}$$

welche bei der Umstellung, deren sie fähig sind, zur Auflösung aller in C rechtwinkligen sphärischen Dreiecke hinreichend sein werden. Die diesem Winkel C gegenüberstehende Seite c wird eben so, wie bei den geradlinigen rechtwinkligen Dreiecken, die Hypotenuse genannt. Man könnte auch ähnliche Formeln für den Fall erhalten, wo eine der Seiten des sphärischen Dreiecks dem Quadranten gleich ist; wir wollen uns indessen dabei nicht aufhalten.

§. 59.

Um die Logarithmen auf die Berechnung der sphärischen Dreiecke bequem anwenden zu können, muß man die Formeln der §. 53 und 54 in andere umformen, deren Zähler und Nenner in Faktoren zerlegbar werden, und dies hat Euler auf eine eben so einfache als elegante Art geleistet.

1) Aus dem unter den Formeln von §. 53 befindlichen Ausdruck

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

zieht man

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \cos A = \dfrac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \sin c} \\[2ex] 1 + \cos A = \dfrac{\cos a - \cos (b + c)}{\sin b \sin c} \end{array}\right\} (\text{§. } 11)$$

woraus, weil

$$\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = tg\, \tfrac{1}{2} A^2 \; (\text{§. } 27),$$

folgt

$$tg\, \tfrac{1}{2} A^2 = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\cos a - \cos (b + c)}.$$

Da nun $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{1}{2} (p + q) \sin \frac{1}{2} (p - q)$ (§. 27), so hat man

$$tg\, \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (b - c + a) \sin \frac{1}{2} (b - c - a)}{\sin \frac{1}{2} (a + b + c) \sin \frac{1}{2} (a - b - c)}}.$$

Verfährt man auf diese Art mit den übrigen Ausdrücken des 53sten §., so wird man zu ähnlichen Resultaten gelangen.

2) Nimmt man in §. 54 den Ausdruck

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

so kann man daraus herleiten

$$1 - \cos a = -\frac{\cos (B + C) + \cos A}{\sin B \sin C}$$

$$1 + \cos a = \frac{\cos (B - C) + \cos A}{\sin B \sin C},$$

woraus folgt

$$tg\, \tfrac{1}{2} a^2 = -\frac{\cos (B + C) + \cos A}{\cos (B - C) + \cos A};$$

da aber

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \tfrac{1}{2} (p + q) \cos \tfrac{1}{2} (p - q) \quad (\text{§. } 27),$$

so wird man haben

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(B+C+A)\,\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\tfrac{1}{2}(B-C+A)\,\cos\tfrac{1}{2}(B-C-A)}},$$

eine Formel, welche durch das Zeichen — des Zählers nicht imaginär wird; denn da der Bogen $\tfrac{1}{2}(A+B+C)$ größer als ein Quadrant und kleiner als drei Quadranten ist (§. 50 erste Anmerk.), so ist sein Cosinus negativ *).

---

*) Euler gebraucht, um seinen Resultaten eine übereinstimmigere Gestalt zu geben, durchgängig die Tangenten der zu bestimmenden Bogen. Man kann aber in den beiden bisher betrachteten Fällen etwas einfacher zum Sinus gelangen.

1) Man hat $1 - \cos A = 2\sin\tfrac{1}{2}A^2$ (§. 27) und durch die Formel

$$\cos p - \cos q = -2\sin\tfrac{1}{2}(p+q)\,\sin\tfrac{1}{2}(p-q)$$

ergiebt sich

$$\cos(b-c) - \cos a = -2\sin\tfrac{1}{2}(b-c+a)\,\sin\tfrac{1}{2}(b-c-a),$$

oder, wenn man das Zeichen des Bogens $\tfrac{1}{2}(b-c-a)$ und seines Sinus ändert,

$$\cos(b-c) - \cos a = 2\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b).$$

Setzt man diesen Werth in den für $1 - \cos A$ oder $2\sin\tfrac{1}{2}A^2$ und zieht auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so entsteht

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b\,\sin c}}.$$

2) Setzt man $1 - \cos a = 2\sin\tfrac{1}{2}a^2$,

und, zufolge des Ausdrucks für $\cos p + \cos q$,

$$\cos(B+C) + \cos A = 2\cos\tfrac{1}{2}(B+C+A)\,\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)$$

so findet man

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(B+C+A)\,\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\,\sin C}}$$

Dividirt man den Ausdruck für $\sin\tfrac{1}{2}A$ durch den für $tg\,\tfrac{1}{2}A$ und berücksichtigt, daß

$$\sin\tfrac{1}{2}(b-c-a) = -\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(a-b-c) = -\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a),$$

so erhält man, nach gehöriger Reduction:

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\,\sin c}},$$

einen Ausdruck, der für den Fall zweckmäßig ist, wo der Winkel A nur sehr wenig von zwei Rechten abweicht, weil alsdann $\tfrac{1}{2}A$ sich dem Rechten nähert und der Sinus sich nur sehr wenig ändert. (Vergl. die Anm. B.)

Behandelt man auf dieselbe Weise die Ausdrücke für $\sin\tfrac{1}{2}a$ und $tg\,\tfrac{1}{2}a$, so wird man erhalten

3) Die Ausdrücke in §. 53. geben ferner

$$\cos a - \cos b \cos c = \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos b - \cos a \cos c = \sin a \sin c \cos B,$$

und wenn man die erste dieser Gleichungen durch die zweite dividirt und erwägt, daß nach den Gleichungen (A)

$$\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A},$$

so wird man finden

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\sin B \cos A}{\sin A \cos B}.$$

Addirt man auf beiden Seiten die Einheit, so erhält man

$$1 + \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} = 1 + \frac{\sin B \cos A}{\sin A \cos B},$$

und diese Gleichung verwandelt sich leicht in

$$\frac{(\cos a + \cos b)(1 - \cos c)}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\sin (A + B)}{\sin A \cos B},$$

indem man beide Glieder jedes Theils auf einerlei Benennung bringt.

Subtrahirt man die Einheit, statt sie zu addiren, so erhält man

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} - 1 = \frac{\sin B \cos A}{\sin A \cos B} - 1,$$

und hieraus

$$\frac{(\cos a - \cos b)(1 + \cos c)}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\sin (B - A)}{\sin A \cos B}.$$

Dividirt man dies Resultat durch das vorgehende, so entsteht

$$\frac{\cos a - \cos b}{\cos a + \cos b} \times \frac{1 + \cos c}{1 - \cos c} = \frac{\sin (B - A)}{\sin (B + A)},$$

und da nach der Tafel S. 36

$$\frac{\cos a - \cos b}{\cos a + \cos b} = tg \tfrac{1}{2}(b + a) \; tg \tfrac{1}{2}(b - a),$$

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(A + B - C) \cos \frac{1}{2}(A + C - B)}{\sin B \sin C}}$$

Verf.

$$\frac{1 + \cos c}{1 - \cos c} = \cot \tfrac{1}{2} c^2$$

und $\sin p = 2 \sin \frac{1}{2} p \cos \frac{1}{2} p$,

so wird man finden

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (b - a) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (b + a) \cot \tfrac{1}{2} c^2$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2} (B - A) \cos \frac{1}{2} (B - A)}{\sin \frac{1}{2} (B + A) \cos \frac{1}{2} (B + A)} \ldots . (a).$$

Wenn man aber nach einander die Einheit zu jedem Theil der Gleichung $\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}$ hinzusetzt und davon abzieht, und hierauf das eine Resultat durch das andere dividirt, so gelangt man zur Gleichung

$$\frac{\sin b - \sin a}{\sin b + \sin a} = \frac{\sin B - \sin A}{\sin B + \sin A},$$

welche vermittelst der Tafel S. 35 und 36 in folgende umgeformt werden kann:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (b - a) \cot \tfrac{1}{2} (b + a) = \frac{\sin \frac{1}{2} (B - A) \cos \frac{1}{2} (B + A)}{\sin \frac{1}{2} (B + A) \cos \frac{1}{2} (B - A)}.$$

Multiplicirt man nun diese Gleichung mit der Gleichung (a), erwägend, daß

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (b + a) \cot \tfrac{1}{2} (b + a) = 1 \ (\S\ 9),$$

so wird man erhalten

$$[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (b - a)]^2 \cot \tfrac{1}{2} c^2 = \frac{[\sin \frac{1}{2} (B - A)]^2}{[\sin \frac{1}{2} (B + A)]^2},$$

und, wenn man auf beiden Seiten die Quadratwurzel auszieht,

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (b - a) \cot \tfrac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{1}{2} (B - A)}{\sin \frac{1}{2} (B + A)}.$$

Dividirt man endlich die Gleichung (a) durch diese letztere, so findet man

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (b + a) \cot \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos \frac{1}{2} (B - A)}{\cos \frac{1}{2} (B + A)}.$$

Erinnert man sich, daß $\frac{1}{\cot p} = \operatorname{tg} p$ (§. 9), so wird man aus den beiden obigen Gleichungen die Ausdrücke

$$tg\,\tfrac{1}{2}(b-a) = tg\,\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}(B-A)}{\sin\tfrac{1}{2}(B+A)}\ ^{*)}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}(b+a) = tg\,\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(B-A)}{\cos\tfrac{1}{2}(B+A)}$$

erhalten, vermittelst welcher man zwei Seiten eines sphärischen Dreiecks finden kann, wenn man die dritte Seite und die anliegenden Winkel hat: denn wenn man die Werthe der Bogen $b+a$ und $b-a$ mit b' und a' bezeichnet, so ist

$$b = \tfrac{1}{2}(b'+a'),\ a = \tfrac{1}{2}(b'-a').$$

4) Nimmt man im 54sten §. die Gleichungen

$$\cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C \cos a$$

$$\cos B + \cos A \cos C = \sin A \sin C \cos b,$$

und dividirt die erste durch die zweite, so wird man finden

$$\frac{\cos A + \cos B \cos C}{\cos B + \cos A \cos C} = \frac{\sin B \cos a}{\sin A \cos b} = \frac{\sin b \cos a}{\sin a \cos b}.$$

Setzt man zu jedem Theil dieser Gleichung die Einheit hinzu und zieht sie davon ab, und dividirt das eine Resultat durch das andere, so ergiebt sich wie oben

$$\frac{\cos A - \cos B}{\cos A + \cos B} \times \frac{1-\cos C}{1+\cos C} = \frac{\sin(b-a)}{\sin(b+a)},$$

oder

$$tg\,\tfrac{1}{2}(B-A)\,tg\,\tfrac{1}{2}(B+A)\,tg\,\tfrac{1}{2}C^2$$
$$= \frac{\sin\tfrac{1}{2}(b-a)\cos\tfrac{1}{2}(b-a)}{\sin\tfrac{1}{2}(b+a)\cos\tfrac{1}{2}(b+a)} \ldots\ (b)$$

und da die Gleichung

$$\frac{\sin B - \sin A}{\sin B + \sin A} = \frac{\sin b - \sin a}{\sin b + \sin a},$$

von der bei der vorigen Umformung Gebrauch gemacht worden ist, auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

---

*) Man sieht, daß man auch

$$-\,tg\,\tfrac{1}{2}(b-a) = tg\,\tfrac{1}{2}c\,\frac{-\sin\tfrac{1}{2}(B-A)}{\sin\tfrac{1}{2}(B+A)}$$

d. i. $tg\,\tfrac{1}{2}(a-b) = tg\,\tfrac{1}{2}c\,\dfrac{\sin\tfrac{1}{2}(A-B)}{\sin\tfrac{1}{2}(A+B)}$

schreiben kann. Ist also $A > B$, so ist auch $a > b$ und umgekehrt.

Uebers.

$$tg\,\tfrac{1}{2}(B-A)\,cot\,\tfrac{1}{2}(B+A)=\frac{sin\,\frac{1}{2}(b-a)\,cos\,\frac{1}{2}(b+a)}{sin\,\frac{1}{2}(b+a)\,cos\,\frac{1}{2}(b-a)},$$

so wird man, wenn man die Gleichung (b) durch die eben erhaltene multiplicirt und dividirt, folgende beide Gleichungen finden:

$$tg\,\tfrac{1}{2}(B-A)=cot\,\tfrac{1}{2}C\,\frac{sin\,\frac{1}{2}(b-a)}{sin\,\frac{1}{2}(b+a)}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}(B+A)=cot\,\tfrac{1}{2}C\,\frac{cos\,\frac{1}{2}(b-a)}{cos\,\frac{1}{2}(b+a)},$$

welche, wenn man zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel kennt, die Stelle der vorhergehenden (No. 3) vertreten *).

§. 60.

Nimmt man alle Variationen, deren die im vorigen §. gefundenen Formeln fähig sind, so wird man haben:

$$tg\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{sin\,\frac{1}{2}(a+b-c)\,sin\,\frac{1}{2}(a+c-b)}{sin\,\frac{1}{2}(b+c-a)\,sin\,\frac{1}{2}(a+b+c)}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{sin\,\frac{1}{2}(b+c-a)\,sin\,\frac{1}{2}(a+b-c)}{sin\,\frac{1}{2}(a+c-b)\,sin\,\frac{1}{2}(a+b+c)}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{sin\,\frac{1}{2}(a+c-b)\,sin\,\frac{1}{2}(b+c-a)}{sin\,\frac{1}{2}(a+b-c)\,sin\,\frac{1}{2}(a+b+c)}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-cos\,\frac{1}{2}(B+C-A)\,cos\,\frac{1}{2}(A+B+C)}{cos\,\frac{1}{2}(A+B-C)\,cos\,\frac{1}{2}(A+C-B)}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\frac{-cos\,\frac{1}{2}(A+C-B)\,cos\,\frac{1}{2}(A+B+C)}{cos\,\frac{1}{2}(B+C-A)\,cos\,\frac{1}{2}(A+B-C)}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{-cos\,\frac{1}{2}(A+B-C)\,cos\,\frac{1}{2}(A+B+C)}{cos\,\frac{1}{2}(A+C-B)\,cos\,\frac{1}{2}(B+C-A)}}\ {}^{**}).$$

---

*) Diese Gleichungen lassen sich vermittelst des Polardreiecks unmittelbar und leicht aus den beiden Gleichungen unter No. 3 herleiten. Uebers.

**) Um diese Formeln aus den analogen des vorigen §en herzuleiten, erwäge man, daß $\alpha-\beta-\gamma=\alpha-(\beta+\gamma)$ und $sin\,(p-q)=-sin\,(q-p)$, hingegen $cos\,(p-q)=cos\,(q-p)$ ist. Verf. — Diese Formeln werden für den Gebrauch etwas bequemer, wenn man $\frac{a+b+c}{2}=s$ und $\frac{A+B+C}{2}=S$ setzt. Dann erhält man

$$tg\,\frac{b-a}{2} = tg\,\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}(B-A)}{\sin\tfrac{1}{2}(B+A)}$$

$$tg\,\frac{b+a}{2} = tg\,\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(B-A)}{\cos\tfrac{1}{2}(B+A)}$$

$$tg\,\frac{c-b}{2} = tg\,\tfrac{1}{2}a\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}(C-B)}{\sin\tfrac{1}{2}(C+B)}$$

$$tg\,\frac{c+b}{2} = tg\,\tfrac{1}{2}a\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(C-B)}{\cos\tfrac{1}{2}(C+B)}$$

$$tg\,\frac{a-c}{2} = tg\,\tfrac{1}{2}b\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}(A-C)}{\sin\tfrac{1}{2}(A+C)}$$

$$tg\,\frac{a+c}{2} = tg\,\tfrac{1}{2}b\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(A-C)}{\cos\tfrac{1}{2}(A+C)}$$

$$tg\,\frac{B-A}{2} = \cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}(b-a)}{\sin\tfrac{1}{2}(b+a)}$$

$$tg\,\frac{B+A}{2} = \cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(b-a)}{\cos\tfrac{1}{2}(b+a)}$$

$$tg\,\frac{C-B}{2} = \cot\tfrac{1}{2}A\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}(c-b)}{\sin\tfrac{1}{2}(c+b)}$$

$$tg\,\frac{C+B}{2} = \cot\tfrac{1}{2}A\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(c-b)}{\cos\tfrac{1}{2}(c+b)}$$

$$tg\,\frac{A-C}{2} = \cot\tfrac{1}{2}B\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a-c)}{\sin\tfrac{1}{2}(a+c)}$$

$$tg\,\frac{A+C}{2} = \cot\tfrac{1}{2}B\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(a-c)}{\cos\tfrac{1}{2}(a+c)}.$$

Aus den zwölf letztern Formeln kann man die folgenden herleiten, welche dazu dienen, die dritte Seite oder den dritten Winkel zu bestimmen, wenn man zwei Seiten und die ihnen gegenüberstehenden Winkel kennt:

$$tg\,\tfrac{1}{2}c = tg\,\tfrac{1}{2}(b-a)\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}(B+A)}{\sin\tfrac{1}{2}(B-A)}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}c = tg\,\tfrac{1}{2}(b+a)\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}(B+A)}{\cos\tfrac{1}{2}(B-A)}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(s+b)\,\sin(s-c)}{\sin(s-a)\,\sin s}}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos(S-A)\cos S}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}$$

Uebers.

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,a = tg\,\tfrac{1}{2}\,(c - b)\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}\,(C + B)}{\sin\tfrac{1}{2}\,(C - B)}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,a = tg\,\tfrac{1}{2}\,(c + b)\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}\,(C + B)}{\cos\tfrac{1}{2}\,(C - B)}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,b = tg\,\tfrac{1}{2}\,(a - c)\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}\,(A + C)}{\sin\tfrac{1}{2}\,(A - C)}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,b = tg\,\tfrac{1}{2}\,(a + c)\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}\,(A + C)}{\cos\tfrac{1}{2}\,(A - C)}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}\,C = tg\,\tfrac{1}{2}\,(B - A)\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}\,(b + a)}{\sin\tfrac{1}{2}\,(b - a)}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}\,C = tg\,\tfrac{1}{2}\,(B + A)\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}\,(b + a)}{\cos\tfrac{1}{2}\,(b - a)}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}\,A = tg\,\tfrac{1}{2}\,(C - B)\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}\,(c + b)}{\sin\tfrac{1}{2}\,(c - b)}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}\,A = tg\,\tfrac{1}{2}\,(C + B)\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}\,(c + b)}{\cos\tfrac{1}{2}\,(c - b)}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}\,B = tg\,\tfrac{1}{2}\,(A - C)\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}\,(a + c)}{\sin\tfrac{1}{2}\,(a - c)}$$

$$\cot\tfrac{1}{2}\,B = tg\,\tfrac{1}{2}\,(A + C)\,\frac{\cos\tfrac{1}{2}\,(a + c)}{\cos\tfrac{1}{2}\,(a - c)}\ ^{*})$$

Nimmt man hiezu noch die in §. 47 mit (A) bezeichneten Gleichungen, welche in dem Fall anzuwenden sind, wo man zwei Seiten und einen gegenüberstehenden Winkel, oder zwei Winkel und eine gegenüberstehende Seite kennt, so hat man alles, was zur Auflösung der sphärischen Dreiecke erforderlich ist. Das Vorhergehende kann demnach als ein vollständiger Lehrbegriff der sphärischen Trigonometrie angesehen werden. Combinirt man die verschiedenen hier entwickelten Formeln unter einander, so lassen sich noch manche andere daraus herleiten, die bei den astronomischen Rechnungen von mannigfaltigem Nutzen sind. Man verdankt Hrn. Delambre**) viele elegante Resultate

---

*) Diese und die vorhergehenden Formeln sind unter dem Namen der Neperschen Analogien bekannt, weil sie sich aus den von Neper zur Auflösung der sphärischen Dreiecke gegebenen Regeln herleiten lassen. Man sehe seine *Logarithmorum canonis descriptio.* Verf.

**) Und Gauß. Uebers.

dieser Art, so wie auch wichtige Anwendungen der Annäherungsmethoden oder der Reihen auf diejenigen Fälle, bei denen sich solche anbringen lassen.

Wiederholung der zur Auflösung irgend eines sphärischen Dreiecks nöthigen Formeln.

§. 61.

Wenn man die verschiedenen Abänderungen, welche einerlei Fall darbieten kann, nicht in Anschlag bringt, so werden sich nur folgende sechs finden:

1) Aus den drei Seiten (a, b, c) einen Winkel (A) zu finden.

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)\,\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)}}.$$

2) Aus den drei Winkeln (A, B, C) eine Seite (a) zu finden.

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)\,\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)\,\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B)}}\ ^{*)}.$$

3) Aus zwei Seiten (b, c) und dem eingeschlossenen Winkel (A) die andern Winkel (B, C) zu finden.

$$tg\,\tfrac{1}{2}(B+C) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(b-c)}{\cos\tfrac{1}{2}(b+c)}\,\cot\tfrac{1}{2}A$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(b-c)}{\sin\tfrac{1}{2}(b+c)}\,\cot\tfrac{1}{2}A.$$

---

*) Statt dieser und der vorhergehenden Formel wendet man häufig auch folgende an:

$$\sin\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)\,\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b\,\sin c}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\,\sin C}},$$

welche in der Anmerkung zu §. 79 entwickelt und der analog sind, die man für den ähnlichen Fall in der ebenen Trigonometrie (§. 38) gebraucht. Dieselbe Anmerkung bietet auch die Werthe für $\cos\tfrac{1}{2}A$ und $\cos\tfrac{1}{2}a$ dar.

Verf.

Und dann die dritte Seite (a) zu finden, bediene man sich der Formel des sechsten Falls.

4) Aus zwei Winkeln (B, C) und der zwischen beiden liegenden Seite (a) die beiden andern Seiten (b, c) zu finden.

$$tg\ \tfrac{1}{2}\ (b + c) = \frac{cos\ \tfrac{1}{2}\ (B - C)}{cos\ \tfrac{1}{2}\ (B + C)}\ tg\ \tfrac{1}{2}\ a$$

$$tg\ \tfrac{1}{2}\ (b - c) = \frac{sin\ \tfrac{1}{2}\ (B - C)}{sin\ \tfrac{1}{2}\ (B + C)}\ tg\ \tfrac{1}{2}\ a.$$

Um den dritten Winkel (A) zu berechnen, gebrauche man die Formel des fünften Falls.

5) Aus zwei Seiten (a, c) und einem Gegenwinkel (C) den andern Gegenwinkel (A) zu finden.

$$sin\ A = \frac{sin\ a\ sin\ C}{sin\ c}.$$

6) Aus zwei Winkeln (A, C) und einer Gegenseite (c) die andere Gegenseite (a) zu finden.

$$sin\ a = \frac{sin\ c\ sin\ A}{sin\ C}.$$

Um in den beiden letztern Fällen den Winkel (B) und die Seite (b) zu finden, von denen jener zwischen den beiden gegebenen oder berechneten Seiten (a, c) und diese zwischen den beiden gegebenen oder berechneten Winkeln (A, C) liegt, verändere man in den Formeln für den dritten und vierten Fall b in a, B in A, und umgekehrt. Man erhält sodann:

$$tg\ \tfrac{1}{2}\ (A + C) = \frac{cos\ \tfrac{1}{2}\ (a - c)}{cos\ \tfrac{1}{2}\ (a + c)}\ cot\ \tfrac{1}{2}\ B,$$

$$tg\ \tfrac{1}{2}\ (a + c) = \frac{cos\ \tfrac{1}{2}\ (A - C)}{cos\ \tfrac{1}{2}\ (A + C)}\ tg\ \tfrac{1}{2}\ b,$$

woraus man die Werthe für $cot\ \tfrac{1}{2}\ B$ und $tg\ \tfrac{1}{2}\ b$, welche in diesem Falle die unbekannten Größen sind, berechnen kann.

Vermittelst dieser und der im 58sten §. gegebenen Formeln wird man mit Leichtigkeit jedes sphärische Dreieck auflösen,

wenn man die gegebenen und gesuchten Winkel und Seiten mit A, B, C, a, b, c, bezeichnet. Die Rechnung geschieht durch Addition und Subtraction der Logarithmen, auf die Weise, wie es die im 39sten §. gegebenen Beispiele zeigen, nur daß man sich bloß der Tafeln der Logarithmen der trigonometrischen Linien zu bedienen hat, weil nur von Kreisbogen die Rede ist.

Wenn in den vier ersten Fällen die Umstände der Aufgabe zweifelhaft lassen sollten, ob die gesuchten Bogen oder Winkel mehr oder weniger als ein Quadraut oder ein rechter Winkel betragen, so kann man dieser Schwierigkeit ausweichen, wenn man zu den Ausdrücken für die Cosinus oder Cotangenten der gesuchten Stücke seine Zuflucht nimmt (§. 57) *). Allein in den beiden letzten Fällen kann es sich zutragen, daß die vorgelegte Aufgabe zweier Auflösungen fähig ist, und man wird sich hievon leicht überzeugen, wenn man untersucht, wie ein körperliches Dreieck zu construiren ist, von welchem man entweder zwei Seitenflächen und die Neigung einer von diesen beiden zur dritten, oder die Neigung zweier Seitenflächen zur dritten und den Winkel der Seitenlinien kennt, welche eine der beiden ersteren bestimmen. Ich kann hierüber nicht ins Einzelne eingehen **), sondern will bloß die Ergebnisse der Untersuchung hersetzen.

1) Das sphärische Dreieck kann aus den gegebenen Stücken a, c und C nur auf Eine Art entstehen,

---

*) Wenn, wie bei unsern gewöhnlichen sphärischen Dreiecken, alle Seiten und Winkel kleiner als 2^q sind (§. 57), so kann in den vier ersten Fällen keine Zweideutigkeit statt finden. Bei No. 1 und 2 ist die Wurzelgröße allemal positiv zu nehmen, da $\frac{1}{2}$ A und $\frac{1}{2}$ a kleiner als 1^q sind. Bei No. 3 und 4 ergiebt sich das Zeichen der gesuchten Tangente allemal aus den gegebenen Stücken mit Bestimmtheit; es ist immer $tg\ \frac{1}{2}(B + C)$ mit $cos\ \frac{1}{2}(b + c)$ und $tg\ \frac{1}{2}(b + c)$ mit $cos\ \frac{1}{2}(B + C)$ von gleichem Zeichen, mithin auch von gleicher Beschaffenheit. Uebers.

**) Man vergleiche das Werk *Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques* von Bertrand, Theil *II*, *Trigonométrie* Abschnitt *V*. oder den dritten Theil seiner *Elémens de Géométrie*. Verf.

wenn $C = 1^q$
$C < 1^q$ $a < 1^q$ $c > a$
$C < 1^q$ $a > 1^q$ $c > 2^q - a$
$C > 1^q$ $a < 1^q$ $c < 2^q - a$
$C > 1^q$ $a > 1^q$ $c < a$,

und es ist zweier Formen fähig,

wenn $C < 1^q$ $a < 1^q$ $c < a$
$C < 1^q$ $a > 1^q$ $c < 2^q - a$
$C > 1^q$ $a < 1^q$ $c > 2^q - a$
$C > 1^q$ $a > 1^q$ $c > a$
C < oder > 1^q, $a = 1^q$.

2) Mit den gegebenen Stücken A, C und c kann es nur eine Form erhalten,

wenn $c = 1^q$
$c > 1^q$ $A > 1^q$ $C < A$
$c > 1^q$ $A < 1^q$ $C < 2^q - A$
$c < 1^q$ $A > 1^q$ $C > 2^q - A$
$c < 1^q$ $A < 1^q$ $C > A$,

und es hat deren zwei, wenn

$c > 1^q$ $A > 1^q$ $C > A$
$c > 1^q$ $A < 1^q$ $C > 2^q - A$
$c < 1^q$ $A > 1^q$ $C < 2^q - A$
$c < 1^q$ $A < 1^q$ $C < A$
c < oder > 1^q, $A = 1^q$ *)

---

*) Diese Tafel lehrt wohl die zweideutigen Fälle von den unzweideutigen unterscheiden, zeigt aber nicht, ob in den letztern der gesuchte Winkel oder die gesuchte Seite spitz oder stumpf zu nehmen ist. Wenn z. B. $C = 0^q,79$, $a = 0^q,63$ und $c = 0^q,67$ ist, so gehört dieser Fall zu den zweideutigen, weil $C < 1^q$, $a < 1^q$ und $c > a$ ist; da aber die Zahl 9,9592009, der Werth von *lg sin* A, sowohl *lg sin* $0^q,728$ als *lg sin* $1^q,272$ ist, so ist die Frage, welcher von beiden Bogen den Werth von A ausdrückt. Hier ist ein anderes Mittel, die zweideutigen Fälle von deu unzweideutigen zu unterscheiden, das zugleich dieser Schwierigkeit abhilft. Aus $\sin a : \sin c = \sin A : \sin C$ folgt

§. 62.

Um von der sphärischen Trigonometrie eine Anwendung zu geben, will ich folgende Aufgabe wählen: **wenn man, *Fig.* 18, den in einer geneigten Ebene gemessenen Winkel MSN und die Winkel kennt, welche die Schenkel SM und SN des ersteren mit der Vertikalen SS′ bilden, den auf der Horizontalebene M′S′N′ von den Projectionen S′M′ und S′N′ der Linien SM und SN eingeschlossenen Winkel M′S′N′ zu finden.**

Die drei Linien SS′, SM und SN bilden am Punkt S, als Scheitelpunkt, ein körperliches Dreieck, worin man die drei ebenen Winkel MSN, S′SM, S′SN kennt, und da die gerade Linie SS′ auf der Ebene M′S′N′ senkrecht ist, so ist sie es auch auf jeder der geraden Linien S′M′ und S′N′, welche, da sie in den Ebenen S′SM und S′SN liegen, einen Winkel einschließen, der dem Neigungswinkel derselben gleich ist. Die vorgelegte

---

$$\frac{\sin a + \sin c}{\sin a - \sin c} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin A - \sin C}$$

wofür nach Tafel, S. 36,

$$\frac{tg\,\tfrac{1}{2}\,(a + c)}{tg\,\tfrac{1}{2}\,(a - c)} = \frac{tg\,\tfrac{1}{2}\,(A + C)}{tg\,\tfrac{1}{2}\,(A - C)}$$

geschrieben werden kann. Es ist also $tg\,\frac{1}{2}\,(a + c) : tg\,\frac{1}{2}\,(a - c) = tg\,\frac{1}{2}\,(A + C) : tg\,\frac{1}{2}\,(A - C)$. Aber $a - c$ ist allemal kleiner als 2^q, weil $a < 2^q$, und $c > 0$ ist. Dasselbe gilt von $A - C$. Es ist mithin $\frac{1}{2}(a - c)$ sowohl als $\frac{1}{2}\,(A - C)$ immer kleiner als 1^q, folglich sind das zweite und vierte Glied der Proportion allemal positiv und das erste und dritte immer von gleichem Zeichen, d. i. $\frac{1}{2}\,(A + C)$ ist entweder größer oder kleiner als 1^q, je nachdem $\frac{1}{2}\,(a + c)$ größer oder kleiner als 1^q ist, und umgekehrt. In dem oben betrachteten Falle nun kann A nicht anders als 0,728 genommen werden, weil $\frac{1}{2}\,(a + c) = 0^q,65$, also kleiner als 1^q, mithin $\frac{1}{2}\,(A + C)$ ebenfalls kleiner als 1^q sein muß. Nähme man $A = 1{,}272$, so wäre $\frac{1}{2}(A + C) = 1{,}031$, mithin größer als 1^q. Setzt man $C = 0^q,79$, $a = 0^q,67$ und $c = 0^q,63$, so ist $lg\,\sin A = 9{,}9926597$ und A entweder $= 0^q,883$ oder $= 1^q,117$. Da nun $tg\,\frac{1}{2}(A + C)$ positiv bleibt, welchen von beiden Werthen man auch für A annehmen mag, so gehört dieser Fall zu den zweideutigen. Uebers.

Aufgabe verlangt also die Bestimmung dieser Neigung. Dem zu Folge findet sie sich vermittelst graphischer Operationen in meinem *Essai de géometrie sur les plans et les surfaces* oder in dem Ergänzungsbande zu den Anfangsgründen der Geometrie No. 41 aufgelöst *).

Man kann aber auch den gesuchten Winkel erhalten, wenn man sich ihn als ein Stück des sphärischen Dreiecks BAC vorstellt, das auf einer um den Mittelpunkt S mit dem Halbmesser der Tafeln gebildeten Kugel aus den Durchschnitten der Oberfläche mit den Ebenen MSN, S'SM nnd S'SN entsteht. Man hat in diesem Dreieck die Seiten AB, AC, BC, welche die Maaße der gegebenen Winkel S'SM, S'SN, MSN sind, und der gesuchte Winkel ist genau dem Winkel A gleich, der daher nach der ersten Regel des vorhergehenden §en gefunden werden kann.

Beispiels halber setze ich, man habe gefunden:

den Winkel MSN = $0^{q},7597$ = BC
den Winkel S'SN = $0^{q},5913$ = AC
den Winkel S'SM = $0^{q},6542$ = AB.

---

*) Mit den hier gedachten graphischen Operationen hat es folgende Bewandniß: man zeichnet zuvörderst die rechtwinkligen Dreiecke M'SS' und N'SS', worin man die Winkel bei S kennt, für einen beliebig angenommenen Werth von SS', z. B. für 100 Theile eines Maaßstabes, und erhält so die Seiten S'M', S'N', SM' und SN' in ihren richtigen Verhältnissen zu SS'. Dann construirt man das Dreieck M'SN', worin man die Seiten SM', SN' und den Winkel M'SN' kennt, und erhält so die Seite M'N'. Endlich zeichnet man noch das Dreieck M'S'N' aus seinen drei Seiten, und erhält so den gesuchten Winkel M'S'N', die Reduction des in der geneigten Ebene gemessenen Winkels MSN auf den Horizont. Was man auf diesem Wege durch Zeichnung findet, erhält man genauer durch Rechnung, und zwar entweder vermittelst der ebenen Trigonometrie, indem man nach einander die Dreiecke M'SS', N'SS', M'SN' und M'S'N' auflöst, oder vermittelst der sphärischen auf die im Text angegebene Weise. Die letzte Art der Berechnung hat vor der ersten den Vorzug, daß sie das Gesuchte durch einen einzigen Ansatz, also viel kürzer, finden lehrt. Uebers.

Diese Winkel stellen die Seiten eines sphärischen Dreiecks vor, worin man den Winkel A sucht. Ich mache

$$a = 0^g,7597, \quad b = 0^g,5913, \quad c = 0^g,6542,$$

und gebrauche die Formel

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b - c) \sin \frac{1}{2}(a + c - b)}{\sin b \sin c}}$$

(Anmerkung zu S. 86).

Die Bogen $\frac{1}{2}(a + b - c)$ und $\frac{1}{2}(a + c - b)$ werden gefunden, wenn man zuerst die halbe Summe der drei Seiten a, b, c sucht und von derselben jede der Seiten, die den gesuchten Winkel einschließen, abzieht (§. 38). Dann nimmt man die Logarithmen der Sinus beider Reste und die arithmetischen Ergänzungen von den Logarithmen der Sinus der gedachten beiden Seiten, wie es nachstehende Rechnung zeigt:

	$0^g,7597$		
	$0,5913$		
	$0,6542$		
Summe	$2^g,0052$		
halbe Summe	$1^g,0026$		$1^g,0026$
	$0,5913$		$0,6542$
Erster Rest	$0^g,4113$	Zweiter Rest	$0^g,3484$

$$lg \sin 0^g,4113 = 9,7796340$$
$$lg \sin 0^g,3484 = 9,7162989$$
$$\text{d. E. } lg \sin 0^g,5913 = 0,0964168$$
$$\text{d. E. } lg \sin 0^g,6542 = 0,0674914$$
$$19,6598411$$

$$lg \sin \tfrac{1}{2} A = 9,8299205 = lg \sin 0^g,47254.$$

Verdoppelt man diesen Bogen, so hat man $A = 0^g94508$ oder $0^g,9451$, wenn man sich auf die vier ersten Decimalstellen beschränkt. Dies ist der Winkel M'S'N', den die Projectionen der Linien MS und NS bilden.

Drittes Kapitel.

Von der Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

§. 63.

Bei der Anwendung der Algebra auf die Geometrie hat man zuvörderst den Zweck, die algebraischen Operationen zur Verbindung mehrerer Lehrsätze der Geometrie zu gebrauchen, um Folgerungen daraus zu ziehen. Auf diese Weise bin ich in den beiden vorhergehenden Kapiteln zu den vornehmsten Formeln der ebenen und sphärischen Trigonometrie gelangt. Ein jeder Satz, welcher eine gewisse Beziehung zwischen verschiedenen geraden Linien von einer bestimmten Größe aufstellt, kann durch eine Gleichung ausgedrückt werden, und alle Umformungen, welche mit dieser Gleichung vorgenommen werden können, geben, in die gewöhnliche Sprache übergetragen, neue Sätze, welche Folgerungen aus dem sind, von welchem man ausgegangen ist. Allein dieser Gesichtspunkt begreift nur einen sehr geringen Theil von dem, was die Anwendung der Algebra auf die Geometrie umfassen muß. Dieser Zweig der Mathematik, im Allgemeinen betrachtet, beschränkt sich nicht auf die Untersuchung der Eigenschaften der Raumgrößen vermittelst algebraischer Operationen, sondern zeigt auch, wie man mittelst dieser Eigenschaften alles, was nur irgend ein algebraischer Ausdruck bezeichnet, darstellen, die Construction der Figuren beständig auf Rechnungsoperationen zurückführen und von diesen wieder auf jene

kommen könne. Dies werden die im gegenwärtigen Kapitel abzuhandelnden Aufgaben lehren.

Die algebraische Schrift, die so bequem ist, die Bedingungen der die Zahlen betreffenden Aufgaben auszudrücken, gewährt keine geringere Bequemlichkeit bei denen, welche sich auf die Geometrie beziehen. Diese letztern lassen sich, so wie die erstern, in Gleichungen bringen, so bald man nur die Beziehung aufgefunden hat, in welcher die unbekannten Größen zu den bekannten stehen; indessen kommen dabei immer einige von den Eigenschaften der vorgelegten Größen in Betracht.

§. 64.

Da z. B. ein Dreieck bestimmt ist, wenn seine drei Seiten bekannt sind, so muß sich durch dieses Mittel auch der Flächinhalt bestimmen lassen, und man kann sich folgende Aufgabe vorlegen:

Aus den drei Seiten eines Dreiecks einen Ausdruck für seinen Flächeninhalt zu finden.

Der Inhalt eines Dreiecks ist dem halben Produkt aus der Grundlinie in die Höhe gleich. Man sieht also, daß es hier darauf ankomme, die Höhe zu finden. Wenn man nun im Dreieck ABC, *Fig.* 13, auf die Seite AC eine senkrechte Linie herabläßt, so erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke, worin sich Relationen zwischen den Seiten AB und BC, der Senkrechten BD und den durch diese gebildeten Segmenten AD und CD auffinden lassen werden.

Wenn man nämlich die Seiten AB, BC und AC des Dreiecks durch c, c', c'', das Segment AD durch t und die Senkrechte BD durch u bezeichnet, so werden die rechtwinkligen Dreiecke ABD und BDC geben

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2,\quad \overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2.$$

Ueberdies hat man im ersten Dreieck der Figur

$$DC = AC - AD = c'' - t$$

und im zweiten

$$DC = AD - AC = t - c''.$$

Setzt man statt der Linien die Buchstaben, welche sie bezeichnen, und zieht in Erwägung, daß $(c'' - t)^2 = (t - c'')^2$, so wird man in beiden Dreiecken die Gleichungen

$$c^2 = u^2 + t^2,\quad c'^2 = u^2 + (c'' - t)^2$$

haben, welche nur die zwei unbekannten t und u enthalten, und folglich deren Werthe bestimmen werden.

Wenn man die zweite Gleichung entwickelt und sie von der ersten abzieht, so verschwinden die Glieder u^2 und t^2, und man erhält

$$c^2 - c'^2 = 2c''t - c''^2\ ^{*}),$$

woraus folgt

$$t = \frac{c^2 - c'^2 + c''^2}{2c''}.$$

Da nun die Gleichung $c^2 = u^2 + t^2$

$$u = \pm\sqrt{c^2 - t^2}$$

giebt, so entsteht durch die Substitution des Werthes von t

$$u = \pm\sqrt{c^2 - \frac{(c^2 - c'^2 + c''^2)^2}{4c''^2}}$$

oder

$$u = \frac{\pm\sqrt{4c^2c''^2 - (c^2 - c'^2 + c''^2)^2}}{2c''}.$$

---

*) Ich will hiebei bemerken, daß diese Gleichung unter der Form $c'^2 = c^2 + c''^2 - 2c''t$ angesetzt, mit Bezug auf die Seite c′ oder BC den in §. 76 meiner Elemente der Geometrie vorgetragenen Satz ausdrückt. Verf. — Wenn c′ die einem der spitzen Winkel eines beliebigen Dreiecks gegenüberliegende Seite bezeichnet, so findet allemal die Gleichung $c'^2 = c^2 + c''^2 - 2c''t$ statt, wo t das an dem spitzen Winkel anliegende Segment einer der beiden übrigen Seiten ist, der Perpendikel mag innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegen, oder auch mit c′ zusammenfallen. Steht dagegen c′ einem stumpfen Winkel gegenüber, so ist $c'^2 = c^2 + c''^2 + 2c''t$, wo t das an dem stumpfen Winkel anliegende Segment ist. Man sieht, wie man diese Gleichungen in Form von Sätzen ausdrücken könne, und welche Relation jedesmal zwischen dem Quadrat der einen Seite eines Dreiecks und der Summe der Quadrate der beiden übrigen statt finde. Uebers.

Vermittelst dieser Formel kann man die Höhe eines Dreiecks aus den drei Seiten bestimmen, und da sein Flächeninhalt durch das Produkt aus der halben Grundlinie in die Höhe gemessen wird, so sieht man, daß sich der Flächeninhalt finden läßt, wenn die drei Seiten bekannt sind.

Da der Buchstabe u die auf die Seite c'' des gegebenen Dreiecks herabgelassene senkrechte Linie bezeichnet, so wird der Flächeninhalt sein

$$\tfrac{1}{2}\, c'' u = \tfrac{1}{4} \sqrt{4 c^2 c''^2 - (c^2 - c'^2 + c''^2)^2},$$

indem man für u den eben gefundenen Werth setzt.

Dies ist der Ausdruck für den Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Seiten gegeben sind. Entwickelt man die Größe unter dem Wurzelzeichen, so findet man nach vorgängiger Reduction

$$2 c^2 c'^2 + 2 c^2 c''^2 + 2 c' c''^2 - c^4 - c'^4 - c''^4$$

einen mit Bezug auf jede der drei Seiten c, c', c'' symmetrischen Ausdruck, wie sich schon aus der einfachen Betrachtung erwarten ließ, daß der Werth für den Flächenraum, wenn man die Buchstaben untereinander verwechselt, unverändert bleiben muß. Aber man kann ihm eine für den Gebrauch bei Rechnungen noch bei weitem bequemere Gestalt geben, wenn man erwägt, daß die Größe $4 c^2 c''^2 - (c^2 - c'^2 + c''^2)^2$, als die Differenz zweier Quadrate, sich in die Factoren

$$2 c c'' + c^2 + c''^2 - c'^2, \quad 2 c c'' - c^2 - c''^2 + c'^2$$

oder

$$(c + c'')^2 - c'^2, \quad -(c - c'')^2 + c'^2$$

zerlegen läßt, die wieder folgende vier geben;

$$c + c' + c'', \; c + c'' - c', \; c + c' - c'', \; c' + c'' - c;$$

man wird also haben

$$\tfrac{1}{4} \sqrt{(c + c' + c'')(c' + c'' - c)(c + c'' - c')(c + c' - c'')}.$$

Wenn man nun bedenkt, daß

$$c' + c'' - c = (c + c' + c'') - 2c$$
$$c + c'' - c' = (c + c' + c'') - 2c'$$
$$c + c' - c'' = (c + c' + c'') - 2c''$$

ist,

ist, und $c + c' + c'' = 2s$ setzt, so wird man endlich finden, daß der Flächeninhalt des Dreiecks ABC durch

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{2s \,.\, 2(s - c) \,.\, 2(s - c') \,.\, 2(s - c'')}$$

ausgedrückt sein wird, und sich auf

$$\sqrt{s\,(s - c)\,(s - c')\,(s - c'')}$$

reducirt, eine Formel, welche wegen des Nutzens, den sie zur Berechnung des Inhalts einer jeden geradlinigen Figur gewährt, eben so merkwürdig ist, als wegen ihrer Eleganz. Sie zeigt, **daß der Flächeninhalt eines Dreiecks der Quadratwurzel aus dem Produkt der halben Summe der drei Seiten multiplicirt in die Differenzen zwischen dieser halben Summe und jeder der Seiten gleich ist** *).

§. 65.

Wenn man das in den Elementen der Geometrie §. 234 und 268 angegebene Verfahren, die vollständige Höhe einer abgestumpften Pyramide oder eines abgestumpften Kegels zu finden, auf eine Formel bringt, so gelangt man zu einem merkwürdigen Ausdruck für das Volumen dieser Körper.

Bezeichnet man nämlich mit a und b die beiden homologen Seiten der Grundflächen einer abgestumpften Pyramide, oder die Halbmesser der Grundflächen eines abgestumpften Kegels, mit g die Höhe dieser Körper und mit h die Höhe der vollständigen Körper, zu den die abgestumpften gehören, so hat man die Proportion

$$a - b : a = g : h, \text{ also } h = \frac{ag}{a - b}.$$

Für die Höhe des abgeschnittenen Körpers erhält man den Ausdruck

---

*) Da $\sqrt{s\,(s - c)\,(s - c')\,(s - c'')} = \sqrt{s\,(s - c)} \times \sqrt{(s - c')\,(s - c'')}$ ist, beide Quadratwurzeln mittlere Proportionallinien bezeichnen und ab das Rechteck aus a und b andeutet, so sieht man, welcher Satz in dieser Formel liegt. Uebers.

$$h - g = \frac{ag}{a - b} - g = \frac{bg}{a - b}.$$

Da nun die beiden Grundflächen der abgestumpften Körper als ähnliche Figuren sich wie die Quadrate ihrer homologen Linien verhalten, so wird man, wenn man die untere Grundfläche mit S, die obere mit s bezeichnet, die Proportion haben

$$S : s = a^2 : b^2 \text{ oder } S : a^2 = s : b^2.$$

Drückt dann m das Verhältniß der Größen S und a^2 aus *), so ergiebt sich

$$S = a^2 m, \quad s = b^2 m,$$

und die Inhalte der ganzen und der abgeschnittenen Körper werden, wenn man für S, s, h und h — g die eben gefundenen Werthe setzt, durch die Formeln

$$\tfrac{1}{3}\, h\, S = \frac{m g a^3}{3\,(a - b)}, \quad \tfrac{1}{3}\,(h - g)\, s = \frac{m g b^3}{3\,(a - b)}$$

dargestellt sein. Zieht man den zweiten Ausdruck vom ersten ab, so erhält man für das Volumen des abgestumpften Körpers

$$\frac{mg\,(a^3 - b^3)}{3\,(a - b)} = \tfrac{1}{3} mg\,(a^2 + ab + b^2) = \tfrac{1}{3} g\,(a^2 m + abm + b^2 m).$$

Nun sind $a^2 m$ und $b^2 m$ die untere und die obere Grundfläche, und setzt man $ab = c^2$, so wird $c = \sqrt{ab}$ die mittlere Proportionallinie zwischen a und b bezeichnen, folglich $abm = c^2 m$ der Flächeninhalt einer Figur sein, welche den Grundflächen ähnlich und über der Seite oder mit dem Halbmesser c beschrieben ist.

Hieraus folgt also, daß das Volumen einer abgestumpften Pyramide oder eines abgestumpften Kegels gleich ist dem dritten Theil der Höhe multiplicirt in die Summe der Inhalte der beiden Grundflächen und einer ihnen ähnlichen Figur, welche über der mittleren Proportionallinie zwischen den homologen Seiten oder den beiden Halbmessern der Grundflächen beschrieben

---

*) Beim Kegel ist m Ludolphische Zahl. Uebers.

ist; und da abm $=\sqrt{a^2m \cdot b^2m}$ ist, so sieht man, daß der Inhalt dieser Figur die mittlere Proportionalgröße zwischen den Inhalten der beiden Grundflächen ist. Errichtet man über diesen drei Figuren Pyramiden oder Kegel von gleicher Höhe mit dem abgestumpften Körper, so wird die Summe ihrer Inhalte dem des abgestumpften Körpers gleich sein.

§. 66.

Bei den vorhergehenden Aufgaben suchte man ein numerisches Resultat; zuweilen will man Linien finden.

Wenn z. B. verlangt würde, in das Dreieck ABC, *Fig.* 19, ein Quadrat DEFG einzuschreiben, so müßte man die Aufgabe als aufgelöst ansehen, und dann zwischen den durch das Dreieck unmittelbar gegebenen Linien und der Seite des Quadrats eine Relation aufsuchen, die sich algebraisch ausdrücken ließe.

Zu diesem Ende lasse man die Senkrechte BH herab, welche man als bekannt betrachten kann, da man sie zu ziehen weiß. Vergleicht man nun die ähnlichen Dreiecke BAC und BDE, BAH und BDI, so ergeben sich folgende Proportionen:

$$AB : BD = AC : DE$$
$$AB : BD = BH : BI,$$

woraus folgt

$$AC : DE = BH : BI.$$

Diese letztere Proportion giebt eine Relation zwischen den bekannten Linien AC und BH und den unbekannten DE und BI. Aber BI hängt von DE ab, da BI = BH — IH, und nach dem Begriff des Quadrats ist IH = DE. Bezeichnet man nun die gegebenen AC und BH durch a und b, und durch x die unbekannte IH oder DE, so wird man haben

$$a : x = b : b - x,$$

woraus folgt

$$bx = ab - ax$$

und aus dieser Gleichung des ersten Grades erhält man

Staatl. Bibliot. Passau

$$x = \frac{ab}{a + b}.$$

Wenn die Geraden a und b auf ein gemeinschaftliches Maaß bezogen oder in Zahlen ausgedrückt sind, so giebt die obige Formel vermittelst arithmetischer Operationen die Zahl, welche die Länge der Geraden IH ausdrückt, und wenn man diese Zahl auf die Gerade BH trägt, so erhält man den Punkt I, durch welchen die Gerade DE gezogen werden muß.

Es ist indessen nicht nothwendig, die Rechnung zu Hülfe zu nehmen, um den Punkt I zu bestimmen, da sich die in dem Ausdruck für x angezeigten Operationen auch an den Linien bewerkstelligen lassen. Man sieht nämlich, daß diese Unbekannte das vierte Glied folgender Proportion ist:

$$a + b : a = b : x,$$

und daß es folglich darauf ankommt, zu den drei Linien a + b, a und b die vierte Proportionallinie zu finden.

Man hält es im Allgemeinen für elegant, die Operationen, die man, um die Auflösung zu erhalten, verrichten muß, mit der Figur, welche die gegebenen Stücke der Aufgabe enthält, zu verbinden. Es kann demnach in gegenwärtiger Aufgabe der rechte Winkel CHB zur Bestimmung der gesuchten vierten Proportionallinie gebraucht werden. Man trage nämlich auf die verlängerte HC

$$HL = a = AC \text{ und } LK = b = BH,$$

ziehe BK und lege IL parallel mit BK, so wird der Punkt I, für welchen man erhält

$$HK : HL = BH : IH$$

zur Seite DE des Quadrats DEFG gehören.

§. 67.

Auf eben diese Art hat man mit Aufgaben von einem höhern Grade als dem ersten zu verfahren.

Man weiß, daß eine Linie nach dem mittleren und äußeren Verhältniß oder nach stetiger Proportion theilen so viel

heißt, als sie dergestalt theilen, daß der eine Abschnitt die mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen Linie und dem andern Abschnitt sei. Um diese Aufgabe algebraisch aufzulösen, bezeichne man die ganze Linie durch a und den unbekannten Abschnitt durch x, so wird der andere Abschnitt $a - x$ sein, und man wird haben

$$a : x = x : a - x,$$

woraus man erhält

$$a^2 - ax = x^2,$$

und wenn man diese Gleichung auflöst, so ergiebt sich

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2}.$$

Die in dieser Auflösung angezeigten Operationen können an den Linien vermittelst eines rechtwinkligen Dreiecks verrichtet werden; denn da $a^2 + \frac{1}{4}a^2$ die Summe der Quadrate der Linien a und $\frac{1}{2}a$ ist, so ist die Wurzelgröße $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2}$ die Hypotenuse AC des aus den beiden Katheten $AB = a$ und $BC = \frac{1}{2}a$ construirten rechtwinkligen Dreiecks ABC, *Fig.* 20. Mán braucht also nur, um die beiden Werthe von x zu erhalten, die Linie AC mit der Linie $BC = \frac{1}{2}a$ durch Subtraction und Addition zu verbinden, welches geschieht, wenn man BC von C nach D auf die Linie AC und von C nach D′ auf deren Verlängerung hinträgt; denn man wird alsdann haben

$$AD = AC - CD = \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$$

$$AD' = AC + CD = \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2} + \tfrac{1}{2}a$$

wo, wie man sieht, AD der erste und $-AD'$ der zweite Werth von x ist, auf den die Gleichung leitet.

Wenn nun die gerade Linie AD vermittelst eines Kreisbogens auf AB nach E getragen wird, so erhält man die in §. 132 der Elemente der Geometrie gegebene Auflösung; und giebt man der Gleichung $a^2 - ax = x^2$ die Gestalt

$$a^2 = ax + x^2,$$

so ergiebt sich daraus die Proportion

$$a + x : a = a : x$$

oder $AD' : AB = AB : AD$,

weil $AD' = AD + 2BC = AD + AB$ ist.

Hieraus folgt, daß auch die Linie AD' im Punkt D nach stetiger Proportion getheilt ist, und zwar dergestalt, daß das größere Segment DD' der gegebenen Linie AB gleich ist. Man wird weiter unten sehen (§. 77), wie die Aufgabe zu fassen ist, wenn sie zugleich beide Werthe von x in sich begreifen soll, und was es mit dem Zeichen — vor dem zweiten für eine Bewandniß hat.

Diese Beispiele sind hinreichend, um zu zeigen, daß die algebraische Auflösung der bestimmten Aufgaben der Geometrie der sich auf die Zahlen beziehenden ganz analoge Umstände darbietet. Man muß zuvörderst die Aufgabe in eine Gleichung bringen, und dann den Ausdruck für die Unbekannte daraus herleiten; anstatt aber den jedesmaligen Werth derselben durch Rechnung zu bestimmen, muß man mit den bekannten Linien graphische Operationen vornehmen, welche den durch die algebraischen Zeichen angedeuteten entsprechen. So hat man in der Aufgabe von §. 66, deren Gleichung nur vom ersten Grade war, die Unbekannte vermittelst der Proportionallinien bestimmt, und in der vorstehenden, die auf eine Gleichung vom zweiten Grade führte, die Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks zu Hülfe genommen. Solche Bestimmungsarten sind es, die man die Construction der Werthe der Unbekannten nennt, und ich will nun die allen Aufgaben dieser beiden Grade gemeinschaftlichen Principien auseinandersetzen.

§. 68.

Eine allgemeine Bemerkung, von deren Richtigkeit sich zu überzeugen man häufig Gelegenheit finden wird, ist die, daß, wenn in einer Aufgabe nur Linien vorkommen und die gesuchte Größe ebenfalls eine Linie ist, der Ausdruck derselben im Zähler immer einen Faktor mehr als im Nenner hat, und jede dieser beiden Größen in homogene (aus gleich vielen Faktoren oder

Dimensionen bestehende) Glieder zerlegbar ist. Der in §. 64 für t gefundene Ausdruck erfüllt diese Bedingung; die Glieder seines Zählers haben zwei Faktoren und sein Nenner nur einen.

Hieraus folgt, daß man, wenn der Ausdruck irgend einer Linie keine Wurzelgröße enthält, und alle darin vorkommende Größen durch Linien ausgedrückt werden, die Länge der gesuchten Linie ohne Rechnung finden könne, wenn man zu den gegebenen Linien vermittelst Lineal und Zirkel vier Proportionallinien sucht. Um dies zu beweisen, wird folgendes Exempel genügen.

Es sei

$$t = \frac{abc + d^3 - e^2 f}{gh + i^2}.$$

Da der Zähler dieses Ausdrucks aus Gliedern von drei Faktoren zusammengesetzt ist, indeß die Glieder im Nenner nur zwei haben, so gehört er nach der obigen Bemerkung einer Linie an. Setzt man nun

$$abc = kd^2, \quad e^2 f = k'd^2,$$
$$gh = k''d, \quad i^2 = k'''d,$$

so wird man haben

$$t = \frac{d^2 (k + d - k')}{d (k'' + k''')} = \frac{d (k + d - k')}{k'' + k'''};$$

man wird also t erhalten, wenn man, nachdem k, k′, k″, k‴ bestimmt sind, zu den drei Linien $k'' + k'''$, $k + d - k'$ und d eine vierte Proportionallinie sucht. Nun hat man vermittelst der angenommenen Gleichungen

$$k = \frac{abc}{d^2} = \frac{ab}{d} \times \frac{c}{d}, \quad k' = \frac{e^2 f}{d^2} = \frac{ef}{d} \times \frac{e}{d},$$

$$k'' = \frac{gh}{d}, \qquad k''' = \frac{i^2}{d};$$

man wird daher zu diesen Werthen vermittelst folgender Proportionen gelangen

$$d : a = b : \frac{ab}{d} \qquad d : c = \frac{ab}{d} : \frac{abc}{d^2}$$

$$d : e = f : \frac{ef}{d} \qquad d : e = \frac{ef}{d} : \frac{e^2 f}{d^2}$$

$$d : g = h : \frac{gh}{d} \qquad d : i = i : \frac{i^2}{d},$$

indem man die vierten Glieder derselben, nämlich

$$\frac{ab}{d}, \frac{abc}{d^2} = k, \quad \frac{ef}{d}, \frac{e^2 f}{d^2} = k', \quad \frac{gh}{d} = k'', \quad \frac{i^2}{d} = k'''$$

durch Construction sucht *).

Man sieht leicht, daß der Geist der Methode, deren ich mich so eben zur Construction eines algebraischen Ausdrucks bedient habe, darin besteht, den Zähler und Nenner des vorgelegten Ausdrucks in Produkte von einer gewissen Anzahl einfacher Faktoren, oder Faktoren vom ersten Grade zu zerfällen, was durch die angewandten Mittel immer geschehen kann.

Es giebt Fälle, wo sich diese Umformung unmittelbar bewerkstelligen läßt, ohne daß man erst nöthig hat, unbestimmte Größen einzuführen. Der Ausdruck

$$t = \frac{c\,(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$$

---

*) Man kann hier auch so verfahren, daß man den Nenner durch Division mit dem einen Faktor irgend eines seiner Glieder als ein Produkt zweier Faktoren darstellt, und dann jedes Glied des Zählers einzeln durch den so umgeformten Nenner dividirt. So erhält man $t = \frac{abc + d^3 - e^2 f}{gh + i^2}$ $= \frac{abc + d^3 - e^2 f}{i\left(\frac{gh}{i} + i\right)} = \frac{abc + d^3 - e^2 f}{ik} = \frac{ab}{i} \times \frac{c}{k} + \frac{d^2}{i} \times \frac{d}{k}$ $- \frac{ef}{i} \times \frac{e}{k}$, wo k die Linie $\frac{gh}{i} + i$ bezeichnet. Auf eine ganz ähnliche Weise läßt sich jeder andere gebrochene algebraische Ausdruck, der den im Text gedachten Bedingungen genügt, behandeln, Zähler und Nenner mögen aus so vielen Gliedern und diese Glieder aus so vielen Dimensionen bestehen, als man will. Man sieht übrigens, daß die Aufgabe, einen solchen Ausdruck zu construiren, sich auf folgende reducirt: die Unbekannte aus einer Gleichung des ersten Grades durch Construction zu finden, wenn alle Glieder derselben homogen und alle darin vorkommende Größen durch Linien ausgedrückt sind. Uebers.

ist von dieser Art; denn sein Zähler läßt sich verwandeln in

$$c\,(a + b)\,(a - b),$$

und sein Nenner kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{a^2 + b^2},$$

so daß man hat

$$t = \frac{(a + b)\,(a - b)\,c}{\sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{a^2 + b^2}},$$

was durch die Proportionen

$$\sqrt{a^2 + b^2} : a + b = c : \frac{(a + b)\,c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} : a - b = \frac{(a + b)\,c}{\sqrt{a^2 + b^2}} : \frac{(a - b)\,(a + b)\,c}{\sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{a^2 + b^2}}$$

erhalten werden kann. Die in der Rechnung angewandte Wurzelgröße läßt sich leicht construiren, weil sie die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ausdrückt, dessen beide Katheten a und b sind. (Man vergleiche die Anmerkung D am Schlusse des Werkes.)

§. 69.

Das rechtwinklige Dreieck und der Kreis bieten uns die Mittel dar, die Quadratwurzel einer jeden in Linien ausgedrückten Größe zu construiren. Der Gebrauch des erstern ist einleuchtend, wenn die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe die Summe oder die Differenz zweier Quadrate ist. Man hat nämlich in diesem Fall $\sqrt{a^2 + b^2}$ und $\sqrt{a^2 - b^2}$; der erste dieser Ausdrücke kann als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks angesehen werden, dessen Katheten a und b sind, und der andere als eine Kathete eines eben solchen Dreiecks, in welchem die Hypotenuse a und die andere Kathete b ist.

Auch kann man durch eine Reihe dieser Dreiecke den Ausdruck

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

construiren; denn nachdem man zuvörderst $\sqrt{a^2 + b^2}$ erhalten, bezeichne man diese Linie durch α, was geben wird

$$a^2 + b^2 = \alpha^2,$$

und die vorgelegte Größe wird nun sein

$$\sqrt{\alpha^2 + c^2 + d^2}.$$

Hierauf construire man die Wurzelgröße $\sqrt{\alpha^2 + c^2}$ und bezeichne das Resultat durch β, so wird man haben

$$\alpha^2 + c^2 + \beta^2.$$

Es bleibt nun nur noch übrig $\sqrt{\beta^2 + d^2}$ zu finden, was geschieht, indem man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sucht, dessen Katheten β und d sind. Es ist leicht, dieses Verfahren auf jede andere Wurzelgröße ähnlicher Art anzuwenden, es mögen sich unter dem Wurzelzeichen so viele Quadrate befinden, als man nur will.

§. 70.

Ich gehe nun zur Anwendung des Kreises bei der Ausziehung der Quadratwurzeln über. Man weiß, daß die auf einem Durchmesser errichtete Senkrechte die mittlere Proportionallinie zwischen den beiden Segmenten dieses Durchmessers ist (Geom. §. 130); man wird also $\sqrt{ab}$ erhalten, wenn man, *Fig.* 21, AP = a, BP = b nimmt, und über der Summe AB dieser beiden Linien, als Durchmesser, einen Kreis beschreibt; die in dem Punkt P errichtete Senkrechte PM, die mittlere Proportionallinie zwischen AP und BP, wird dann $\sqrt{ab}$ sein.

Man kann auch zwischen irgend zwei Linien a und b eine mittlere Proportionallinie finden, wenn man die größere zum Durchmesser AB des Kreises nimmt, und die kleinere von A nach P trägt; errichtet man dann die Senkrechte PM und zieht die Sehne AM, so wird dies die verlangte mittlere Proportionallinie sein (Geom. §. 131).

Vermittelst dieser Methoden kann man jede Wurzelgröße vom zweiten Grade construiren, von welcher Beschaffenheit auch die darin enthaltene Größe sein mag *). Es sei z. B.

*) Wenn nur jedes Glied aus nicht mehr als aus zwei Dimensionen

$$\sqrt{a^2 + bc - \frac{def}{g}},$$

so setze man

$$bc = ak, \quad \frac{def}{g} = ak',$$

und der vorgelegte Ausdruck wird in folgenden übergehen:

$$\sqrt{a^2 + ak - ak'} = \sqrt{(a + k - k')\,a},$$

wo dann, um ihn zu construiren, zwischen den Linien $a + k - k'$ und a die mittlere Proportionallinie zu nehmen ist. Es ist übrigens offenbar, daß die Linien k und k' nach §. 68 vermittelst Proportionallinien gefunden werden können, weil die Gleichungen, von denen sie abhängen,

$$k = \frac{bc}{a}, \quad k' = \frac{def}{ag}$$

geben, und auf folgende Proportionen führen:

$$a : b = c : k,$$

$$a : d = e : \frac{de}{a}, \quad g : f = \frac{de}{a} : \frac{def}{ag} = k'$$

§. 71.

Die Größe, welche man construiren will, kann auch nicht homogen sein; dieser Fall wird aber nur dann eintreten, wenn man einige Linien der Einheit gleich gesetzt, oder eine Zahl durch einen Buchstaben oder eine Linie durch eine Zahl dargestellt hat, und die angegebenen Methoden finden immer ihre Anwendung, wenn man nur die als Einheit genommene Linie in allen Gliedern, worin sie sich befinden müßte, wieder erscheinen läßt und ihr angemessene Exponenten giebt.

Wenn man z. B. $x = \sqrt{a + \frac{bc}{d^3}}$ hätte, und aus der Auf-

---

besteht, und falls gebrochene Glieder vorkommen, der Zähler zwei Dimensionen mehr hat, als der Nenner. Man sieht, daß diese Aufgabe sich auch so ausdrücken läßt: die Unbekannte aus einer reinen quadratischen Gleichung durch Construction zu finden, wenn alle Glieder derselben homogen sind. Uebers.

gabe, die auf diesen Ausdruck geführt hat, wüßte, daß er zu einer Linie gehören muß, so würde man einsehen, daß jedes der unter dem Wurzelzeichen befindlichen Glieder zwei Dimensionen haben müßte, und daß man daher, wenn man die Einheit mit n bezeichnet, an statt a und $\frac{bcn^3}{d^3}$ statt $\frac{bc}{d^3}$ zu schreiben hätte, was im Werth dieser Größe nichts ändert, weil $n = 1 = n^3$ und überhaupt $n^m = 1$ ist, welchen Werth auch m haben mag. Man würde auf diese Weise erhalten

$$\sqrt{an + \frac{bcn^3}{d^3}} = \sqrt{n \left(a + \frac{bcn^2}{d^3}\right)},$$

was sich leicht construiren läßt *).

Ich will hiebei bemerken, daß man vermittelst des Vorhergehenden die Quadratwurzel aus einer beliebigen Zahl durch Construction finden kann, wenn man eine mittlere Proportionallinie zwischen zwei Linien nimmt, von denen eine die Einheit darstellt und die andere zu dieser das durch die vorgelegte Zahl ausgedrückte Verhältniß hat. So würde man z. B. $\sqrt{\frac{7}{5}}$ erhalten, wenn man die mittlere Proportionale zwischen zwei Linien suchte, von denen die eine $\frac{7}{5}$ der andern wäre, weil $\sqrt{\frac{7}{5}} = \sqrt{1 \times \frac{7}{5}}$ ist.

§. 72.

Es ist nun nichts leichter, als den Ausdruck der Wurzeln

---

*) Schafft man das Wurzelzeichen weg, so erhält man $x^2 = a + \frac{bc}{d^3}$, und da hier x^2 zwei Dimensionen hat, so muß auch jedes andere Glied der Gleichung zwei Dimensionen haben, wenn keine Linie in der Aufgabe der Einheit gleich gesetzt ist. Man muß daher n so einführen, daß diese Bedingung erfüllt wird, und dies wird bei dem gebrochenen Gliede der Fall sein, wenn der Zähler zwei Dimensionen mehr erhält, als der Nenner. Begreiflich ist der Werth von x mit n veränderlich. So hängt der absolute Werth einer trigonometrischen Linie von dem des Halbmessers ab, den man, wenn er in dem Ausdruck für dieselbe fehlt, jedesmal auf die gedachte Weise einzuführen hat. Vergl. oben S. 40. Uebers.

der Gleichung $x^2 - ax = \pm b^2$ zu construiren, welche alle Gleichungen des zweiten Grades vorstellen kann. In der That erhält man, wenn man den Werth von x daraus bestimmt,

$$x = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + b^2},$$

wenn b^2 positiv ist; und es kommt nun nur darauf an, die Wurzelgröße $\sqrt{\frac{1}{4} a^2 + b^2}$ zu construiren (§. 69), und dann die Summe oder die Differenz dieses Resultats und der Linie $\frac{1}{2} a$ zu nehmen, um die Größe einer jeden Wurzel zu finden.

Wenn b^2 negativ ist, so erhält man

$$x = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 - b^2}.$$

Die Construction ist in diesem Fall von der vorigen nur in so fern verschieden, daß die Wurzelgröße durch eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ausgedrückt wird, statt daß sie es vorher durch die Hypotenuse war und daß kein solches Dreieck mehr statt findet, wenn $\frac{1}{2} a < b$ ist; denn nimmt man alsdann auf einem der Schenkel des rechten Winkels ABC, *Fig.* 22, die Linie AB = b, so wird der aus dem Punkt A als Mittelpunkt mit einem kleineren Halbmesser als AB beschriebene Kreis DE den andern Schenkel BC nicht erreichen. Dieser Umstand stimmt auch mit der Theorie der Gleichungen vom zweiten Grade überein, welche für den gegenwärtigen Fall imaginäre Werthe giebt.

Man kann das Vorhergehende auf folgende Aufgabe anwenden: **Wenn die Summe oder der Unterschied zweier neben einander liegenden Seiten eines Rechtecks und der Flächeninhalt desselben gegeben sind, dieses Rechteck zu construiren.**

Es sei b^2 der Flächeninhalt des verlangten Rechtecks, a die Summe oder der Unterschied der den rechten Winkel einschließenden Seiten und x eine dieser Seiten, so wird die andere im ersten Fall a — x, im andern a + x, und der Flächeninhalt im ersten (a — x) x, im andern (a + x) x sein, so daß man diese beiden Gleichungen haben wird:

$$ax - x^2 = b^2, \quad ax + x^2 = b^2,$$

welche, wenn sie aufgelöst werden, Werthe von x geben, die nach der vorhergehenden Methode construirt werden können *).

§. 73.

Man hat nicht erst nöthig, die Gleichungen vom zweiten Grade aufzulösen, um die Wurzeln durch eine Construction zu finden, sondern sie lassen sich unmittelbar vermittelst der Eigenschaften der im Kreise sich schneidenden geraden Linien finden.

Die Gleichung $x^2 + ax = b^2$, auf die Form

$$x(x + a) = b^2$$

gebracht, bezieht sich auf die Eigenschaften der von einerlei Punkt ausgehenden Secanten und Tangenten (Geom. §. 128); denn wenn man, *Fig.* 23, mit dem Halbmesser $BC = \frac{1}{2}a$ einen Kreis beschreibt, an diesen eine Tangente AB legt, deren Länge b ist, und durch die Punkte A und C die Secante AC zieht, so wird man, wenn man die Linie AD mit x bezeichnet, offenbar haben

$$AD' = AD + DD' = AD + 2BC = x + a$$

und da die obengedachte Eigenschaft $AD \times AD' = \overline{AB}^2$ giebt, so folgt daraus

$$x(x + a) = b^2,$$

welches die vorgelegte Gleichung ist.

Hätte man $x^2 - ax = b^2$, so müßte man $x = AD'$ setzen, wo man dann haben würde

$$AD = x - a, \text{ und } x(x - a) = b^2.$$

Da diese Construction keiner Ausnahme unterworfen ist, so lehrt sie uns, daß die Wurzeln der vorgelegten Gleichung allemal

---

*) Ist a die Summe der beiden Seiten des Rechtecks, so sind dieselben $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ und $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, wo das Rechteck unmöglich wird, wenn $b > \frac{1}{2}a$, oder die Seite des für den Inhalt angenommenen Quadrats größer als die halbe Summe der beiden Seiten ist. Bezeichnet a die Differenz der beiden Seiten, so ist $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ der Werth der größern und $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ der Werth der kleinern, wo das Rechteck für jeden Werth von b möglich ist. Uebers.

reell gefunden werden, wenn b^2 und x^2 zugleich positiv oder negativ sind *).

Die Gleichung $x^2 - ax = - b^2$ verwandelt sich in $ax - x^2 = b^2$ und kann auch folgendermaßen geschrieben werden

$$x (a - x) = b^2.$$

Unter der letztern Form bezieht sie sich auf die Eigenschaften der in einem Kreise sich schneidenden Sehnen; denn wenn man, *Fig.* 24, über einem Durchmesser $AB = a$ einen Kreis beschreibt, aus dem Punkt A die Senkrechte $AC = b$ errichtet, dann zu AB die Parallele CM zieht, und von den Punkten M und M′, wo CM den Kreis schneidet, auf AB die Senkrechten PM und P′M′ fällt, so wird man haben

$$AP \times BP = AP\,(AB - AP) = \overline{PM}^2,$$

oder

$$AP\,(a - AP) = b^2;$$

ferner

$$AP' \times BP' = AP'(AB - AP') = \overline{P'M'}^2,$$

oder

$$AP'\,(a - AP') = b^2;$$

woraus man sieht, daß man, wenn für x nach einander die Geraden AP und AP′ genommen werden, auf die vorgelegte Gleichung

$$ax - x^2 = b^2$$

kommt, und daß folglich die durch das obige Verfahren erhaltenen geraden Linien AP und AP′ die Werthe der unbekannten x sein werden.

Wenn AC größer als der Halbmesser des Kreises oder als $\frac{1}{2}a$ ist, so wird offenbar die gerade Linie CM dem Kreise nicht mehr begegnen, und folglich keine Bestimmung der Unbe-

---

*) Erscheint das bekannte Glied unter der Form bc, so muß man $AB = e$ setzen, wo e die mittlere Proportionallinie zwischen b und c bezeichnet; und hat es die Form b, so muß man dafür bn schreiben, wo n eine als Einheit zu nehmende Linie andeutet. Uebers.

kannten geben; auch sind die Wurzeln der vorgelegten Gleichung in diesem Falle imaginär.

Die Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax = - b^2$ sind von denen der Gleichung $x^2 - ax = - b^2$ nur in so fern unterschieden, als sie mit dem Zeichen — behaftet sind; allein ihre absolute Größe wird immer durch das eben gezeigte Verfahren erhalten.

§. 74.

Bei der Anwendung der Algebra auf die Geometrie muß im Allgemeinen das Zeichen — eben so wie bei den Zahlen erklärt werden, daß man nämlich die Aufgabe gewissermaßen umzukehren oder die damit behafteten Linien in einem Sinn zu nehmen hat, der demjenigen entgegengesetzt ist, in welchem man sie zuvor genommen.

Ehe ich weiter gehe, muß ich in Erinnerung bringen, daß die negativen Größen ihren Ursprung in den Subtractionen haben, welche in der angezeigten Ordnung nicht verrichtet werden können, weil die abzuziehende Größe diejenige übertrifft, von welcher der Abzug geschehen soll. Man erkennt aus diesem Umstande, daß in der Abfassung der Aufgabe oder wenigstens in der Anwendung derselben auf einen vorliegenden Fall ein Fehler angetroffen wird, und berichtigt man diesen Fehler, d. h. modificirt man die Aufgabe dergestalt, daß die Subtraction, die nicht vollzogen werden konnte, möglich wird, so gelangt man zu einem positiven Resultat. Allein bei gewissen Aufgaben, z. B. bei allen denen, welche auf Gleichungen vom ersten Grade führen, ist man dieser Mühe überhoben; denn das Zeichen des Resultats selbst zeigt die Umkehrung an, deren die Bedingungen der Aufgabe fähig sind; und die negativen Werthe, wenn sie nur den Regeln, die für die Operationen mit den negativen Größen festgesetzt sind, gemäß in Rechnung gebracht werden, leisten eben so wie die positiven Größen den Aufgaben ein Genüge. Aus diesem Grunde hat man die Benennung falsche

Wurzeln, womit die früheren Algebraisten *) die negativen Wurzeln der Gleichungen belegten, verworfen.

Man muß daher auch bei den geometrischen Constructionen die negativen Werthe, welche die Algebra gewissen Linien giebt, durch die Subtraction erklären; und um eine Linie von einer anderen abzuziehen, ist nichts weiter zu thun, als die erste auf die zweite von einem ihrer Endpunkte aus hinzutragen. Allein bei dieser graphischen Operation sind einige Bemerkungen zu machen mit Bezug auf die Art, wie man die Linien beschreibt.

Es sei zuvörderst CD, *Fig.* 25, die von AB abzuziehende Linie. Da die erste kleiner als die zweite ist, so wird, wenn man jene von B nach c trägt, die Differenz beider Ac zur rechten Seite des Punkts A liegen. Wenn man aber die größere Linie C′D′ von AB abzuziehen hätte und man trüge, wie vorher, die abzuziehende Linie vom Punkt B aus auf AB hin, so würde die Differenz der beiden vorgelegten Linien durch Ac′ auf der Verlängerung der Linie AB ausgedrückt sein, und folglich auf der linken Seite des Punkts A liegen, d. h. auf einer Seite, die dem Resultat Ac der ersten Operation entgegengesetzt ist. Mit dieser Aenderung der Lage stimmt auch das Zeichen — überein.

Auf den ersten Blick könnte man glauben, daß man bei den Linien AB und C′D′ die angezeigte Subtraction so verrichten müßte, daß man die kleinere auf die größere trüge, weil man eben so bei den Zahlen verfährt, indem man die kleinere von der größern abzieht; man muß aber in Erwägung ziehen, daß die Linien im Allgemeinen dazu dienen, die Abstände gewisser Punkte von einem als fest angenommenen Punkt, auf den man alle übrigen bezieht, zu bestimmen; sie erhalten dann ihre Zunahme von dem diesem Punkt entgegengesetzten Endpunkt aus, und die Subtraction, welche ihrer Natur nach das Entgegengesetzte der Addition ist, aus welcher die Zunahmen entste-

---

*) Cartesius, Wolf und andere. Uebers.

hen, muß auch in einem diesem entgegengesetzten Sinne verrichtet werden, folglich an der Seite, wo die Linien abnehmen. Daher muß man, wenn A auf der Geraden AB der gedachte feste Punkt ist, die Subtraction von CD oder von C′D′ vom Punkte B aus verrichten*). Die Stetigkeit der Linien, und die Möglichkeit sie nach beiden Seiten hin ohne Ende verlängern zu können, setzt uns in den Stand, die Subtraction auf einerlei Weise an denselben zu verrichten, wenn gleich die abzuziehende Linie die größere ist. Folgende sehr einfache Aufgabe wird das eben Gesagte noch mehr ins Licht setzen.

§. 75.

In dem Dreieck ABC, *Fig.* 26, zur Seite AC eine Linie DE parallel zu ziehen, welche einer gegebenen Linie MN gleich sei.

Da die Seiten des Dreiecks gegeben sind, so setze man

$$AB = a, \quad AC = b, \quad MN = c,$$

und nehme den Abstand AD für die Unbekannte, weil die Lage einer geraden Linie, die einer gegebenen parallel sein soll, durch einen einzigen ihrer Punkte bestimmt wird. Nimmt man demnach $AD = x$, so wird $BD = a - x$ sein, und die ähnlichen Dreiecke BAC und BDE werden geben

$$AB : AC = BD : DE$$

oder

$$a : b = a - x : c,$$

folglich

$$ab - bx = ac,$$

$$x = \frac{ab - ac}{b} = \frac{a(b - c)}{b}.$$

*) Die Aufgabe ist hier eigentlich folgende: es soll die Gerade CD von der Geraden AB abgezogen und die Größe und Lage des Unterschiedes mit Bezug auf den festen Punkt A angegeben werden. Es ist also klar, daß der Abzug hier von dem Punkt B aus verrichtet werden muß. Uebers.

Der Werth von x läßt sich nach §. 68 construiren, wenn man von AC = b die Gerade CF = c abzieht, und FD parallel zu CB zieht; denn die Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und ADF führt auf die Proportion:

$$AC : AB = AF : AD$$

$$b : a = b - c : x = \frac{a\,(b - c)}{b}.$$

Wenn die Linie MN größer als AC wäre, so würde sie nicht innerhalb des Dreiecks ABC Platz finden; man müßte dann die Seiten BA und BC verlängern und der Punkt D würde auf die andere Seite des Punkts A in D′ fallen, und dies zeigen auch Calcul und Construction an.

In der That hat man, wenn M′N′ > AC ist, c > b, und b — c wird folglich negativ werden; wenn man indessen die Subtraction der Linien auf die im vorigen §. angezeigte Weise verrichtet, so wird der Punkt F in F′ übergehen und die durch den Punkt F′ zu BC parallel gezogene Linie F′D′ wird nur die Verlängerung der Seite AB in D′ treffen können.

§. 76.

Ueberhaupt, so oft von Abständen die Rede ist, die sich auf einen festen Punkt beziehen und auf einerlei oder parallelen Linien gerechnet werden, müssen die mit dem Zeichen — behafteten eine den mit dem Zeichen + behafteten entgegesetzte Lage annehmen.

In der That, wenn man die Lage zweier Punkte betrachtet, deren Abstände von irgend einer geraden Linie durch a + b und a — c ausgedrückt sind, so wird offenbar der gegenseitige Abstand dieser beiden Punkte b + c sein, weil (a + b) — (a — c) = b + c ist. Um ihnen eine dem angemessene Stellung mit Bezug auf irgend eine gerade Linie A′B′, *Fig.* 27, zu geben, muß man zuvörderst mit dieser Linie, sei es auf der einen oder auf der andern Seite, in der Entfernung AA′ = a eine Parallele AB legen, und dann zu dieser Linie noch zwei

andere Parallelen ziehen, QM in der Entfernung AQ = b außerhalb der beiden ersten, und die andere Q′M′ zwischen beiden in dem Abstande AQ′ = c. Auf diese Weise werden alle Punkte, wie M und M′, welche in den Durchschnitten der beiden letzteren Parallelen und einer auf A′B′ senkrechten Linie liegen, den erforderlichen Abstand von einander haben, und sich mit Bezug auf die mittlere Parallele AB in einer entgegengesetzten Lage befinden, daher auch ihre Abstände von derselben durch + b und — c zu bezeichnen sind. Es ist leicht einzusehen, daß beide auf einerlei Seite von AB liegen würden, wenn ihre Abstände von A′B′ durch a + b und a + c ausgedrückt wären, weil ihr gegenseitiger Abstand dann b — c sein würde.

So werden die Sinus, welche die Abstände der Endpunkte der Bogen vom Durchmesser AA′, *Fig.* 10, und die Cosinus, welche ihre Abstände vom Durchmesser BB′ angeben, ihre Zeichen ändern, wenn sie von der einen Seite dieser Durchmesser zur andern übergehen (§. 23). Die Tangente befolgt mit Bezug auf den Durchmesser AA′ aus denselben Gründen dasselbe Gesetz.

§. 77.

Diese Betrachtungen lassen sich nicht so unmittelbar auf die Secante anwenden, weil sich ihre Richtung in jedem Augenblick ändert; indessen hat sie nichts desto weniger ein ihren verschiedenen Lagen eingenthümliches Zeichen, welches sich aus ihrem analytischen Ausdruck $sec\ a = \frac{R^2}{cos\ a}$ (§. 9) herleiten läßt *).

*) Es scheint mir, daß sich von den Aenderungen des Zeichens der Secante eine ganz natürliche Erklärung geben läßt, wenn man erwägt, daß diese Linie wirklich eine entgegengesetzte Lage annimmt, wenn sie die Tangente nach dem entgegengesetzten Ende hin erreicht. In der That ist es bei den Bogen im zweiten Quadranten BA′ und im dritten A′B′, für welche der analytische Ausdruck der Secante negativ ist, nicht der Halbmesser CM′ oder CM″, der die Tangente NN′ erreicht, sondern der ihm entgegengesetzte CM‴ oder CM. Verf.

Die geraden Linien AD und AD′, *Fig.* 20, welche die Wurzeln der Gleichung vom zweiten Grade $a^2 - ax = x^2$ (§. 67) vorstellen, sind, ob sie gleich zu Werthen von verschiedenen Zeichen gehören, dennoch nicht einander entgegengesetzt; wenn es indessen darauf ankäme, sie zur Auflösung einer Aufgabe anzuwenden, worin sie als Abstände von einem festen Punkt betrachtet und auf einer Linie von constanter Richtung gemessen würden, so müßte man sie nach der Regel von §. 76 auf verschiedene Seiten dieses Punkts tragen.

In der That kann auch die Aufgabe des §. 67 folgendermaßen gefaßt werden:

Auf der Geraden AB = a einen Punkt E von der Lage zu finden, daß der Abstand AE vom Punkt A die mittlere Proportionallinie zwischen seinem Abstande vom andern Endpunkt B und der ganzen Linie AB sei. Da alsdann die beiden Werthe der Unbekannten die Linien AD und AD′ sind, so muß die letztere, welche sich mit dem Zeichen — behaftet findet, von B aus jenseits A nach AE′ getragen werden. Die Richtigkeit dieses Schlusses ist leicht zu prüfen; denn da AD′ in der Gleichung $a^2 - ax = x^2$ dem Werth $-x$ entspricht, so verwandelt sich die Gleichung dadurch in $a^2 + ax = x^2$, welche die Proportion

$$a + x : x = x : a$$

oder $\quad AB + AE'$ oder $BE' : AE' = AE' : AB$

giebt.

Folgende Aufgabe ist ebenfalls sehr brauchbar, zu zeigen, wie man die verschiedenen Auflösungen, welche ein und eben dieselbe Aufgabe darbietet, zu verstehen hat.

§. 78.

Durch einen Punkt E, *Fig.* 28, welcher gegen die auf einander senkrechten Linien AB und AC irgend eine bekannte Lage hat, eine Gerade dergestalt zu legen, daß der zwischen beiden gegebenen Linien ent-

haltene Theil D′F′ derselben von einer gegebenen Größe m sei.

Um die Lage der Linie D′F′ zu erhalten, von der man schon weiß, daß sie durch den Punkt E gehen muß, bedarf es offenbar nur noch eines anderen Punkts von ihr, den man vorläufig nach Belieben annehmen kann. Ich wähle D′, und da der Punkt E gegeben ist, so muß man die durch diesen Punkt mit AB und AC parallel gezogenen Linien GE und HE als bekannt ansehen. Dem zu Folge setze ich:

$$GE = a, \quad HE = b, \quad AD' = y.$$

Dies vorausgesetzt, geben die ähnlichen Dreiecke GED′ und AF′D′

$$GD' : GE = AD' : AF';$$

nun ist $GD' = AD' - AG = AD' - HE = y - b$; folglich wird man haben:

$$y - b : a = y : AF' = \frac{ay}{y - b}.$$

Da nun das Dreieck AF′D′ bei A rechtwinklig ist, so hat man die Gleichung

$$\overline{AD'}^2 + \overline{AF'}^2 = \overline{D'F'}^2,$$

welche sich durch Substitution der Werthe von AD′, AF′ und D′F′ in

$$y^2 + \frac{a^2y^2}{(y - b)^2} = m^2$$

verwandelt, oder in

$$y^4 - 2by^3 + (b^2 + a^2 - m^2)y^2 + 2bm^2y - b^2m^2 = 0 \ldots (1),$$

wenn sie entwickelt und nach y geordnet wird.

Diese Gleichung ist vom vierten Grade, weil die vorgelegte Aufgabe im Allgemeinen vier Auflösungen hat; und wirklich erhellet aus dem bloßen Anblick der Figur, daß man den Bedingungen der Aufgabe auf vier verschiedene Arten genügen kann, nämlich durch die beiden Linien D′F′ und D″F″, welche in dem rechten Winkel, worin sich E befindet, gezogen werden, und durch die Linien D‴F‴ und D⁗F⁗, welche in den Ne-

benwinkeln CAB′ nnd BAC′ des gegebenen Winkels BAC liegen.

Es ist leicht einzusehen, daß die Auflösungen für den Winkel BAC uumöglich werden können, wenn die Größe m unter einer gewissen Gränze ist, welche von der Lage des Punktes E gegen die geraden Linien AB und AC abhängt, daß aber die beiden andern Auflösungen immer reell sind; denn die Linien F‴D‴ und F⁗D⁗ können durch den Punkt A gehen, also Null werden, oder parallel laufen, die erste der Linie AB, die andere der Linie AC, mithin einen unendlichen Werth erhalten.

Es ist nicht weniger einleuchtend, daß die Aufgabe sich vereinfachen läßt, ohne eine von ihren Auflösungen zu verlieren, wenn der Abstand des Punktes E von AB und AC gleich angenommen wird; denn es wird alsdann hinreichend sein, eine von denen des Winkels BAC, und eine der beiden übrigen zu kennen, um alle vier Auflösungen zu haben.

Wüßte man z. B. D′F′ zu ziehen, so würde man D″F″ daraus herleiten, wenn man AF″ = AD′ nähme, weil der Punkt E gegen die beiden Linien AC und AB einerlei Lage haben soll; und aus eben der Ursache könnte man D⁗F⁗ aus D‴F‴ herleiten, wenn man AF⁗ = AD‴ machte.

Dieser Bemerkung zu Folge setze ich GE = HE oder a = b, und die vorgelegte Gleichung wird sich dann in

$$y^4 - 2ay^3 + 2a^2y^2 - m^2(y^2 - 2ay + a^2) = 0 \ldots. (2)$$

verwandeln.

Aus dieser Gleichung läßt sich noch nicht abnehmen, in wie fern sie sich leichter als die vorhergehende auflösen läßt *); allein die vorhin gedachte Relation zwischen den verschiedenen Auflösungen wird die Sache klar machen.

---

*) Der Verf. lehrt die Aufgabe nur für den Fall auflösen, daß a = b ist, weil die Gleichung

$$y^4 - 2by^3 + (b^2 + a^2 - m^2)\, y^2 + 2bm^2y - b^2m^2 = 0$$

keiner allgemeinen Auflösung fähig ist, wenn a und b verschieden sind.

Uebers.

Da die Dreiecke $D'AF'$ und $D''AF''$, $D'''AF'''$ und $D''''AF''''$ congruent sind, so folgt, daß die Winkel $D'F'A$ und $D''F''A$, $D'''F'''A$ und $D''''F''''A$ einander zu einem Rechten ergänzen, daß man folglich, sobald man die Winkel $D'F'A$ und $D'''F'''A$ kennt, auch die beiden andern hat, und daß dann alle Auflösungen der Aufgabe gefunden sein werden. Da man aber auf diese Weise nur zwei Auflösungen unmittelbar zu suchen hat, so ist es vortheilhaft, den Winkel zu bestimmen, den die zwischen den beiden Linien AB und AC enthaltene Gerade mit einer dieser Linien, z. B. mit AB, machen muß.

Nimmt man die Tangente dieses Winkels für die Unbekannte, so zeigt das Dreieck $D'EG$, daß für den Halbmesser 1

$$tg\ D'F'A = tg\ D'EG = \frac{D'G}{GE} = \frac{y-b}{a} = \frac{y-a}{a}$$

ist. Setzt man nun $\frac{y-a}{a} = z$, so wird man haben

$$y = az + a,$$

und substituirt man diesen Werth in die Gleichung (2), so erhält man nach den gehörigen Reductionen

$$a^4z^4 + 2a^4z^3 + (2a^4 - a^2m^2)\,z^2 + 2a^4z + a^4 = 0$$

oder

$$z^4 + 2z^3 + \frac{2a^2 - m^2}{a^2}\,z^2 + 2z + 1 = 0 \ldots . (3)$$

Es ist aber klar, daß wenn die Größe z' dieser Gleichung ein Genüge thut, auch die Größe $\frac{1}{z'}$ ihr Genüge thun werde *); und wenn man sie folgendermaßen schreibt:

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = \frac{m^2}{a^2}\,z^2,$$

---

*) Diese Gleichung ist nämlich von derjenigen Art, welche man reciproke oder wechselseitige nennt. Man findet in No. 41 meines *Complément des Élémens d'Algèbre* die Methode, sie auf den möglichst niedrigen Grad zu bringen; und vermittelst der daselbst angezeigten Umformungen reducirt sich die vorgelegte Gleichung sofort auf den zweiten

so sieht man leicht ein, daß, wenn man auf jeder Seite z^2 hinzusetzt, der erste Theil ein vollkommenes Quadrat wird, nämlich

$$z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1 = (z^2 + z + 1)^2;$$

man hat also

$$(z^2 + z + 1)^2 = \frac{m^2}{a^2} z^2 + z^2,$$

woraus folgt

$$z^2 + z + 1 = \pm z \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + 1},$$

oder

$$z^2 + \frac{a \mp \sqrt{m^2 + a^2}}{a} z + 1 = 0.$$

Diese Gleichung muß wegen der doppelten Form, deren der Coefficient des zweiten Gliedes fähig ist, als eine solche angesehen werden, welche zwei Gleichungen vom zweiten Grade darstellt; und sie giebt, wenn man zur Abkürzung $\sqrt{m^2 + a^2} = n$ setzt,

$$z^2 + \frac{a - n}{a} z + 1 = 0$$

$$z^2 + \frac{a + n}{a} z + 1 = 0.$$

Grad. Verf. — Die Benennung **reciproke Gleichung** für eine Gleichung von der Form

$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + qx^2 + px + 1 = 0,$$

worin die Coefficienten der gleich weit von beiden Enden abstehenden Glieder gleich sind, hat Euler eingeführt. *Comment. vet. Petrop. T. VI, p.* 223. Eine solche Gleichung hat die Eigenschaft, daß wenn a eine Wurzel derselben ist, auch $\frac{1}{a}$ eine Wurzel sein muß. Denn setzt man $x = a$, so erhält man

$$a^6 + pa^5 + qa^4 + ra^3 + qa^2 + pa + 1 = 0$$

und macht man $x = \frac{1}{a}$, so entsteht

$$\frac{1}{a^6} + \frac{p}{a^5} + \frac{q}{a^4} + \frac{r}{a^3} + \frac{q}{a^2} + \frac{p}{a} + 1 = 0$$

und wenn man die letztere Gleichung mit a^6 multiplicirt, so hat man

$$1 + pa + qa^2 + ra^3 + qa^4 + pa^5 + a^6 = 0,$$

welches die vorige rückwärts gelesen ist. Uebers.

Bezeichnet man nun die beiden Wurzeln der ersten durch z', z'' und die der zweiten durch z''', z'''', so hat man, weil das bekannte Glied 1 ist,

$$z'z'' = 1,\ z'''z'''' = 1;$$

und da z die Tangente eines Winkels für den Halbmesser 1 ausdrückt, so folgt, daß die Werthe z', z'' zu zwei einander zum Rechten ergänzenden Winkeln gehören, und daß eben dies bei z''' und z'''' der Fall sein muß (§. 9), welches mit dem, was S. 120 bemerkt worden, übereinstimmt.

Löst man nun obige Gleichungen auf, so erhält man für die erste

$$z = -\frac{a-n}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(a-n)^2 - 4a^2}$$

und für die zweite

$$z = -\frac{a+n}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(a+n)^2 - 4a^2};$$

aber

$$\sqrt{(a-n)^2 - 4a^2} = \sqrt{(n+a)(n-3a)}$$

und $$\sqrt{(a+n)^2 - 4a^2} = \sqrt{(n-a)(n+3a)},$$

und da $n = \sqrt{m^2 + a^2}$ nothwendig größer als a ist, so sieht man, daß die beiden letzten Werthe von z immer reell sein werden, da hingegen die beiden ersten imaginär sind, wenn $n < 3a$ ist.

Ehe dieser Fall eintritt, werden dieselben Werthe gleich werden, wenn n oder $\sqrt{m^2 + a^2} = 3a$ ist. Schafft man das Wurzelzeichen weg, so hat man

$$m^2 + a^2 = 9a^2$$

oder $m^2 = 8a^2$ oder endlich $m = \sqrt{8a^2} = 2a\sqrt{2}$, woraus folgt, daß man in dem Winkel BAC durch den Punkt E keine Gerade ziehen kann, welche kleiner ist als $2a\sqrt{2}$.

Da die Größe n dann $\sqrt{8a^2 + a^2} = 3a$ ist, so werden die beiden ersten Werthe von z = 1 und die beiden andern

$= -2 \pm \sqrt{3}$ sein*). Hieraus folgt, daß dann die beiden Linien D′F′ und D″F″ zusammenfallen und mit AB den Winkel 0°,5 bilden.

Setzt man in dem allgemeinen Falle

$$\sqrt{(a-n)^2 - 4a^2} = \sqrt{(n+a)(n-3a)} = p$$

$$\sqrt{(a+n)^2 - 4a^2} = \sqrt{(n-a)(n+3a)} = q,$$

so hat man als die vier Werthe von z

$$z' = -\frac{a-n-p}{2a},\ z'' = -\frac{a-n+p}{2a},$$

$$z''' = -\frac{a+n-q}{2a},\ z'''' = -\frac{a+n+q}{2a},$$

und sind so die Tangenten z′, z″, z‴, z⁗ gefunden, so hat man auch y vermittelst der Gleichung $y = az + a$ (S. 120). Diese Werthe werden sein:

$$AD' = -\frac{a-n-p}{2} + a = \frac{a+n+p}{2}$$

$$AD'' = -\frac{a-n+p}{2} + a = \frac{a+n-p}{2}$$

$$AD''' = -\frac{a+n-q}{2} + a = \frac{a-n+q}{2}$$

$$AD'''' = -\frac{a+n+q}{2} + a = \frac{a-n-q}{2}$$

Sie lassen sich leicht construiren; denn die Größe n ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten a und m sind, und die Linien p und q werden gleichfalls durch rechtwinklige Dreiecke (§. 69) oder durch mittlere Proportionallinien (§. 70) erhalten, und hat man die Länge der vier gedachten Geraden, so sind die Punkte D′, D″, D‴, D⁗ gefunden **).

---

*) Die beiden letzteren Werthe sind negativ, also die Winkel, denen sie als Tangenten angehören, stumpf; und wirklich bilden EF‴ und EF⁗ mit BB′ nach eben der Richtung, nach welcher die Winkel D′F′A und D″F″A″ genommen sind, stumpfe Winkel. Uebers.

**) Wenn man die über die verschiedenen Umstände der obigen Auf-

§. 79.

Statt den Winkel, welchen die zu ziehende Linie mit AB macht, für die Unbekannte zu nehmen, kann man den Abstand des Punkts E von der Mitte K′ dieser Linie suchen, um daraus D′E herzuleiten. Es sei

$$EK' = x,\ D'K' = F'K' = \frac{m}{2} = l,$$

so hat man

$$D'E = D'K' + EK' = l + x,$$
$$F'E = F'K' - EK' = l - x,$$
$$F'H = \sqrt{\overline{EF'}^2 - \overline{EH}^2} = \sqrt{(l - x)^2 - a^2},$$

und die ähnlichen Dreiecke D′GE, EHF′ geben

$$D'E : EG = EF' : F'H,$$

oder

$$l + x : a = l - x : \sqrt{(l - x)^2 - a^2},$$

woraus die Gleichung folgt

$$a\,(l - x) = (l + x)\sqrt{(l - x)^2 - a^2}.$$

Erhebt man dieselbe zum Quadrat, so findet man

$$x^4 - (2l^2 + 2a^2)\,x^2 + l^4 - 2a^2l^2 = 0,$$

und da diese Gleichung nach Art der quadratischen auflösbar ist, so ergiebt sich zuvörderst

$$x^2 = l^2 + a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4a^2l^2}$$

und dann

$$x = \pm\sqrt{l^2 + a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4a^2l^2}}$$
$$= \pm\sqrt{l^2 + a^2 \pm a\sqrt{a^2 + 4l^2}},$$

---

gabe angestellte Analysis mit der in der Algebra von Bezout vergleicht (s. den dritten Band des *Cours à l'usage de la Marine*, Ausg. 1781, *p.* 334), so wird man sehen, wie unvollständig und fehlerhaft die letztere ist. Sie giebt bloß die beiden durch die Linien D′F′ und D‴F‴ dargestellten Auflösungen. Verf.

welche Ausdrücke sich nach den §en 69 und 70 leicht construiren lassen *).

Diese wegen ihrer Eleganz merkwürdige Auflösung habe ich aus der *Arithmetica universalis* entlehnt. Newton hat sie deshalb gegeben, um zu zeigen, wie sehr eine glückliche Wahl der Unbekannten die Auflösung einer Aufgabe erleichtert. Diejenige, welche er bei der Aufgabe, womit ich mich beschäftige, getroffen hat, ist ihm vermuthlich durch die Erwägung an die Hand gegeben worden, daß der Abstand EK′ nur zwei verschiedene Größen haben kann, die eine mit Bezug auf die beiden Auflösungen D′F′ und D″F″, die andere mit Bezug auf die Auflösungen D‴F‴ und D⁗F⁗, und daß folglich von den vier Werthen desselben je zwei nur in den Zeichen verschieden sein können. Es läßt sich hieraus schließen, daß man, um sich in der Wahl der unbekannten Größe zu bestimmen, allemal diejenige nehmen muß, die unter den verschiedenen Umständen, welche die Aufgabe darbieten kann, den wenigsten Aenderungen unterworfen ist.

§. 80.

Die geringe Zahl der im Vorhergehenden aufgelösten Aufgaben ist hinreichend, um zu zeigen, wie die Algebra zur Auflösung der Aufgaben angewendet werden kann. Man wird aus diesen Beispielen ersehen haben, daß die Umstände, die sich auf die Lage der Linien beziehen, immer aus der Betrachtung der Dreiecke abgeleitet werden können, und sich vermittelst der Eigen-

---

*) Es findet sich

$$EK' = +\sqrt{l^2 + a^2 - a\sqrt{a^2 + 4l^2}}$$
$$EK'' = -\sqrt{l^2 + a^2 - a\sqrt{a^2 + 4l^2}}$$
$$EK''' = +\sqrt{l^2 + a^2 + a\sqrt{a^2 + 4l^2}}$$
$$EK'''' = -\sqrt{l^2 + a^2 + a\sqrt{a^2 + 4l^2}}.$$

Die verschiedenen Zeichen vor dem ersten Radical geben zu erkennen, ob der Punkt K′ von E aus nach dem Schenkel AC oder nach dem Schenkel AB des Winkels ABC hinliegt. Uebers.

schaften dieser Figuren algebraisch ausdrücken lassen. Die Kunst, die Dreiecke, worauf es ankommt, und welche in den Bedingungen der jedesmaligen Aufgabe entweder klar oder versteckt liegen, zu bilden, kann eben so, wie die Fertigkeit, die numerischen Probleme in Gleichungen zu bringen, nur durch Uebung erlangt werden *).

Die verschiedenen im Obigen construirten Ausdrücke beziehen sich bloß auf Linien, weil die Aufgaben, die darauf geführt haben, nur die Bestimmung von Linien beabsichtigten; und dies ist am häufigsten der Fall, weil die Bestimmung der Figuren sich immer auf die ihrer Dimensionen reducirt. Indessen können doch Fälle vorkommen, wo man unmittelbar einen Flächen- oder Körperraum sucht; der Ausdruck, zu welchem man dann gelangt, muß, wenn er homogen ist, in jedem Gliede des Zählers im ersten Fall zwei, und im andern drei Faktoren mehr, als in jedem Gliede des Nenners enthalten. So kann z. B. der Ausdruck

$$\frac{ab^2c - a^3d + d^4}{c^2 + ad}$$

einen Flächenraum bezeichnen, und der Ausdruck

$$\frac{a^7 + b^5c^2 - d^7}{a^4 + b^4}$$

einen Körperraum **).

---

*) Die *Arithmetica universalis* von Newton enthält eine Sammlung von Aufgaben, welche sowohl wegen der Eleganz ihrer Auflösungen als wegen der Mannigfaltigkeit der Art, wie sie gefaßt sind, sehr schätzbar ist. In Carnot's *Géométrie de position* finden sich sehr interessante Aufgaben, welche auf merkwürdige Eigenschaften der Ausdehnung führen. Diese Werke, so wie die des Thomas Simpson, werden denen sehr nützlich sein, die sich in der Auflösung der Aufgaben üben wollen. Verf. — Eine gute Auswahl dessen, was in dieser Hinsicht auch in deutschen Werken geleistet ist, findet man in Meier Hirsch's Sammlung geometrischer Aufgaben. Uebers.

**) In dem Endausdruck in §. 65 für das Volumen der abgekürzten Pyramide kommt m nicht in Betracht, da dieser Buchstabe dort ein Verhältniß und nicht eine Linie bezeichnet. Verf.

Diese Ausdrücke construiren, heißt nichts anders, als ein Rechteck bilden, dessen Inhalt mit dem ersten, oder ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Volumen mit dem zweiten einerlei Werth hat. Zu diesem Ende muß man durch den §. 68 gelehrten analytischen Kunstgriff die erste Formel so umgestalten, daß sie ein Produkt aus zwei Faktoren, und die zweite dergestalt, daß sie ein Produkt aus drei Faktoren werde. Man setze daher

$$ab^2c = m^3k, \quad a^3d = m^3k', \quad d^4 = m^3k'',$$
$$c^2 = mk''', \quad ad = mk'''';$$

da die Größe m willkürlich ist, so werden sich die Größen k, k′, k″, k‴, k'''' vermittelst Proportionallinien bestimmen lassen, und man wird haben

$$\frac{ab^2c - a^3d + d^4}{c^2 + ad} = \frac{m^3k - m^3k' + m^3k''}{mk''' + mk''''}$$
$$= \frac{m^2(k - k' + k'')}{k''' + k''''} = m \times \frac{m(k - k' + k'')}{k''' + k''''},$$

ein Resultat, welches als der Flächenraum eines Rechtecks angesehen werden kann, dessen Grundlinie m, und dessen Höhe die durch die Formel

$$\frac{m(k - k' + k'')}{k''' + k''''}$$

ausgedrückte Linie sein wird.

Da es erlaubt ist, die Linie m nach Belieben anzunehmen, so kann man sie einer der Größen, die in dem zu construirenden Ausdruck vorkommen, oder vielmehr der Einheit gleich setzen, wenn man eine gewählt hat. Das obige Exempel wird sehr vereinfacht, wenn man m = a setzt; man hat alsdann

$$b^2c = a^2k, \quad d = k', \quad d^4 = a^3k'',$$
$$c^2 = ak''', \quad d = k'''',$$

und

$$\frac{ab^2c - a^3d + d^4}{c^2 + ad} = \frac{a^3(k - d + k'')}{a(k''' + d)} = a \times \frac{a(k - d + k'')}{k''' + d}.$$

Dieses Verfahren läßt sich auch leicht auf dem zweiten Ausdruck

$$\frac{a^7 + b^5 c^2 - d^7}{a^4 + b^4}$$

anwenden. Nimmt man nämlich überall a statt der willkürlichen Größe m, so wird man, wenn man

$$b^5 c^2 = a^6 k, \quad d^7 = a^6 k', \quad b^4 = a^3 k''$$

macht, erhalten

$$\frac{a^7 + b^5 c^2 - d^7}{a^4 + b^4} = \frac{a^7 + a^6 k - a^6 k'}{a^4 + a^3 k''}$$

$$= \frac{a^6 (a + k - k')}{a^3 (a + k'')} = a^2 \times \frac{a (a + k - k')}{a + k''}.$$

Die letzte Formel kann offenbar für das Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipedons genommen werden, dessen Grundfläche das über der Linie a construirte Quadrat, und dessen Höhe die durch die Formel

$$\frac{a (a + k - k')}{a + k''}$$

ausgedrückte Linie ist *).

§. 81.

Die Algebra dient nicht allein, die Größe der Linien und der Theile der Ausdehnung in Vergleichung mit einander zu finden, sondern sie bietet auch Mittel dar, die Figuren zu bestimmen, welche diese Linien und überhaupt die Formen der Ausdehnung annehmen. Nachdem Cartesius zuerst bemerkt hatte, daß diese Figuren und Formen Größenverhältnisse zwischen geraden Linien begründen, so gelang es ihm, die Algebra auf die Theorie der Linien im Allgemeinen anzuwenden, und durch diese Entdeckung hat die Mathematik eine ganz neue Gestalt gewonnen.

Wenn man z. B. sich vorstellt, daß man von allen Punkten irgend

---

*) Ein Ausdruck, worin jedes Glied des Zählers vier oder über vier Dimensionen mehr hat, als jedes Glied des Nenners, läßt sich nicht construiren, weil er sich auf keine Raumverhältnisse weiter zurückführen läßt.
Uebers.

irgend einer Linie DE, *Fig.* 29, auf eine der Lage nach gegebene Gerade AB die Senkrechten PM, P′M′, P″M″. . . . herabgelassen, und von einem auf dieser Linie nach Belieben angenommenen Punkt A die Abstände AP, AP′, AP″ . . . gemessen hat, so wird jeder dieser Abstände mit der ihm entsprechenden Senkrechten in einer solchen Verbindung stehen, daß sich aus der einen Linie nothwendigerweise die andere herleiten lassen wird. Und wirklich, wenn man die Größe AP bestimmt hat, so wird der Durchschnitt der krummen Linie DE mit der im Punkt P der Geraden AB errichteten Senkrechten die Größe von PM geben; und kennt man PM, welche Linie durch ab vorgestellt sein mag, so wird man AP erhalten, wenn man von der auf AB Senkrechten AC einen Theil AQ = ab nimmt, und die Gerade QM parallel mit AB zieht; denn der Durchschnitt dieser Parallele mit DE wird einen Punkt M geben, für welchen PM = ab ist.

Es hindert nichts, sich vorzustellen, daß die Linien AP und PM sich auf eine gemeinschaftliche, als Einheit genommene, Linie beziehen, und sie dem gemäß durch Zahlen oder Buchstaben auszudrücken. Wenn sich die zwischen AP und PM, AP′ und P′M′ . . . statt findende Beziehung durch eine algebraische Gleichung ausdrücken läßt, so wird diese Gleichung den Charakter der Linie DE bestimmen und nach einander alle Punkte derselben geben. Dies werden die beiden folgenden überaus einfachen Beispiele klar machen.

§. 82.

Ich will zuerst die durch den Punkt A, *Fig.* 30, gezogene gerade Linie AE betrachten. Die von jedem ihrer Punkte auf die Linie AB gefällten Senkrechten PM, P′M′, P″M″ . . . werden eine Reihe unter einander ähnlicher Dreiecke APM, AP′M′, AP″M″ . . . bestimmen, welche geben werden

$$AP : PM = AP' : P'M' = AP'' : P''M'' \ldots$$

oder

$$\frac{PM}{AP} = \frac{P'M'}{AP'} = \frac{P''M''}{AP''} \ldots$$

Die Beziehung eines jeden Abstandes AP zu seiner Senkrechten PM ist hier leicht abzunehmen; sie besteht in dem constanten Verhältniß, welches jeder der ersten zu der correspondirenden zweiten hat; und wenn man dieses Verhältniß durch a bezeichnet, so wird man haben:

$$PM = a \times AP, \; P'M' = a \times AP', \; P''M'' = a \times AP'' \ldots$$

Alle diese Gleichungen, welche jedem Punkt der Geraden AE besonders zuzugehören scheinen, können in eine einzige zusammengefaßt werden, wenn man den zwischen dem Punkt A und dem Fußpunkt der jedesmaligen Senkrechten enthaltenen Theil AB durch x, und die Senkrechte selbst durch y bezeichnet; denn man wird alsdann $y = ax$ haben. Diese Gleichung, welche zwei unbestimmte Größen x und y enthält, kann nur den Werth der einen geben, und auch dies nur dann, wenn man den Werth der andern willkürlich festgesetzt hat. Wenn man der x irgend einen Werth AP giebt, so nimmt y den correspondirenden PM an. Ist z. B. $a = \frac{1}{2}$, so findet man $PM = \frac{1}{2}AP$, d. i. wenn man PM der Hälfte von AP gleich macht, so wird der Punkt M in der geraden Linie AE liegen.

Da die Linie AE nicht plötzlich im Punkt A abbricht, so muß man sich dieselbe, um sie in ihrer ganzen Ausdehnung verfolgen zu können, unterhalb AB und zur linken Seite der Senkrechten AC nach AE' verlängert vorstellen. Dieser letztere Theil ist ebenfalls unter der Gleichung $y = ax$ begriffen; denn x kann in dieser Gleichung negative Werthe annehmen, und diese Werthe, welche die Abstände von AC ausdrücken, müssen auf der Seite angenommen werden, welche derjenigen entgegengesetzt ist, auf welche man die positiven getragen hat (§. 76); sie werden also Punkte wie p geben, welche rückwärts vom Punkt A liegen. Da nun die entsprechenden Werthe von y ebenfalls negativ sind, so müssen sie auch auf die Seite getragen werden, die der der positiven entgegengesetzt ist, d. h. unter-

halb AB, wie pm. Man sieht übrigens, daß, wenn man Ap = AP nimmt, auch pm = PM sein wird. Auf diese Weise erhält man die Punkte der Verlängerung AE′ der Geraden AE.

§. 83.

Ich will nun zweitens den aus dem Punkt A, *Fig.* 31, als Mittelpunkt, mit dem Halbmesser AD beschriebenen Kreis betrachten. Was die Punkte des Umkreises von den anderen Punkten der Ebene unterscheidet, ist, daß sie alle vom Mittelpunkt A eine dem Halbmesser AD gleiche Entfernung haben, und daß folglich, welchen Punkt M dieser krummen Linie man auch annehmen mag, die geraden Linien AP und PM immer die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sein werden, dessen Hypotenuse AM dem Halbmesser AD gleich ist. Setzt man also

$$AP = x,\quad PM = y,\quad AD = r,$$

so wird man haben

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

woraus man erhält

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

eine Gleichung, welche zeigt, daß man, wenn x oder AP beliebig angenommen ist, y oder PM durch bloße Rechnung und ohne Hülfe einer Construction finden, oder wenigstens das Verhältniß dieser Linie zum Halbmesser bestimmen könne. Setzt man z. B. $x = \frac{1}{3} r$, so wird man finden

$$y = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{9} r^2} = \sqrt{\tfrac{8}{9} r^2} = r \times \tfrac{2}{3}\sqrt{2}.$$

Man begreift leicht, daß man aus diesem Ausdruck die Linien PM für alle zwischen A und D liegende Punkte der Linie AB herleiten könne. Die Gleichung $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ zeigt eben so, wie die geometrische Beschreibung des Kreises, daß diese Curve sich nicht über den Punkt D hinaus erstrecken kann; denn um den Punkt P über D hinaus anzunehmen, müßte x > AD oder > r werden, und in diesem Fall wäre der Werth von x imaginär.

Ob ich gleich nur den Quadranten DE betrachtet habe, so sind doch die drei übrigen, welche den Umkreis ergänzen, in der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ begriffen; denn da die Senkrechte y für einen und eben denselben Werth von x zwei Werthe hat, nämlich

$$+\sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{und} \quad -\sqrt{r^2 - x^2},$$

so muß der zweite auf eine dem ersten entgegengesetzte Seite von AB getragen werden (§. 76), und giebt folglich alle Punkte des Quadranten DE′. Man kann aber auch für x negative Werthe setzen, welche, da die positiven von A nach D getragen sind, von A nach D′ genommen werden müssen; und da zu jedem dieser Werthe zwei von y gehören, so werden die positiven Werthe von y die Punkte des Quadranten D′E, und die negativen die des Quadranten D′E′ bestimmen.

§. 84.

Obwohl man aus den Gleichungen

$$y = ax, \quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

nur Werthe erhält, welche zu getrennten Punkten gehören, so leidet dennoch die Stetigkeit, die aus der Beschreibung der durch diese Gleichungen dargestellten Geraden und Kreislinie folgt, darunter nicht, weil man vermittelst derselben immer zwei Punkte bestimmen kann, die einander so nahe liegen, als man nur will; denn man braucht zu diesem Ende für x nur zwei fast gleiche Werthe zu setzen, und es ist nichts vorhanden, was der Kleinheit des Unterschiedes beider Gränzen setzte.

§. 85.

Diese Art, den Fortschritt der Linien, ich meine die Umstände ihrer Form und Lage darzustellen, indem man sie vermittelst senkrechter Linien auf eine gerade bezieht, verdient die größte Aufmerksamkeit. Man sieht, daß es darauf ankommt, die Lage irgend eines Punktes vermittelst seines Abstandes von

zwei auf einander senkrechten geraden Linien AB und AC, *Fig.* 29, anzugeben; denn der Punkt M ist bestimmt, so bald man die Entfernungen AP und AQ hat, weil er sich im Durchschnitt der durch die Punkte P und Q mit AC und AB parallel gezogenen Linien PM und QM befinden muß.

Die Linien AP und AQ, oder die ihnen gleichen QM und PM, werden **Coordinaten** genannt. Man bedient sich gewöhnlich des Wortes Abscisse, um diejenige zu bezeichnen, welche man als bekannt annimmt, und giebt der andern den Namen **Applicate** oder **Ordinate**. So war im Vorhergehenden, wo ich immer die Linien PM durch die Linien AP ausdrückte, PM die Ordinate und AP die Abscisse. Die Linien AB und AC, welche die Richtungen der Coordinaten bestimmen, werden die **Axen der Coordinaten** genannt.

Es ist wohl zu merken, daß für die in der Linie AB liegenden Punkte der Abstand AQ oder PM Null ist, und daß man folglich, wenn man ihn durch y bezeichnet, für alle solche Punkte $y = 0$ hat. Aus eben der Ursache hat man für alle Punkte, welche auf der Linie AC liegen, QM oder AP oder $x = 0$, und endlich für den Punkt A, den man den **Anfangspunkt der Coordinaten** nennt, zugleich

$$x = 0, \quad y = 0.$$

So lange man nur die absoluten Werthe der Abscisse AP und der Ordinate PM angiebt, bleibt der Punkt M noch gewissermaßen unbestimmt; denn man kennt alsdann nur die Entfernungen dieses Punktes von den unbegränzten geraden Linien BB′ und CC′, *Fig.* 32, und es bleibt bei gleichen Entfernungen unentschieden, in welchem der vier rechten Winkel BAC, B′AC, B′AC′, BAC′ er sich befindet; allein die Combinationen der vor den Coordinaten AP und PM stehenden Zeichen geben an, in welchem dieser vier Winkel der vorgelegte Punkt zu suchen ist. In der That wird man, wenn man sich dahin vereinigt hat, das Zeichen + den von A nach B und C genommenen Theilen der Linien BB′ und CC′ zu geben, den

von A nach B′ und C′ liegenden Theilen eben dieser Linien das Zeichen — vorsetzen müssen. Hiernach hat man

$$\text{für den Punkt M des Winkels} \begin{cases} BAC \ldots \begin{cases} + AP = + x \\ + PM = + y \end{cases} \\ B'AC \ldots \begin{cases} - AP = - x \\ + PM = + y \end{cases} \\ B'AC' \ldots \begin{cases} - AP = - x \\ - PM = - y \end{cases} \\ BAC' \ldots \begin{cases} + AP = + x \\ - PM = - y \end{cases} \end{cases}$$

Die Wahl der auf einander senkrechten Linien AB und AC ist nicht die einzige, die man treffen kann, um die Lage irgend eines Systems von Punkten in einer Ebene zu bestimmen, sondern jede Verbindung von Linien, welche geeignet ist, die Lage eines Punkts zu fixiren, z. B. seine Entfernungen von zwei gegebenen Punkten, würde man zu diesem Zweck ebenfalls gebrauchen können; allein in der Regel bieten die senkrechten Coordinaten die meiste Leichtigkeit und Einfachheit dar, und wir werden weiterhin an mehreren Beispielen sehen, wie man von solchen Coordinaten zu verschiedenen anderen Arten, die Lage der Punkte in einer Ebene zu bestimmen, gelangen könne.

§. 86.

Die Gleichung, welche für eine gegebene Linie die Beziehung zwischen den AP und PM ausdrückt, wird die **Gleichung dieser Linie**, und die Liuie ihrerseits der **geometrische Ort der Gleichung** genannt.

Es ist klar, daß jede unbestimmte geometrische Aufgabe, welche zwei unbekannte Größen enthält, auf einen geometrischen Ort führt. Wenn z. B. alle rechtwinklige Dreiecke gebildet werden sollten, welche über einer gegebenen Hypotenuse a construirt werden können, so würde, wenn man die Katheten dieser Dreiecke durch x und y bezeichnete, $x^2 + y^2 = a^2$ die Gleichung der Aufgabe sein, und man würde derselben ein Genüge thun,

wenn man mit einem der Linie a gleichen Halbmesser einen Quadranten beschriebe, und von jedem Punkt desselben auf den Halbmesser senkrechte Linien fällte; der Quadrant würde nun der Ort sämmtlicher Scheitel eines der spitzen Winkel dieser Dreiecke sein *).

Die Gleichung einer Curve wird jedesmal erhalten, wenn man irgend eine ihrer Eigenschaften, oder die Umstände ihrer Construction, wie oben (§. 83 und 84) bei der geraden Linie und beim Kreise geschehen ist, analytisch ausdrückt. Umgekehrt führt eine jede Gleichung zwischen zwei unbestimmten Größen auf eine Linie, deren Eigenschaften sie zu erkennen giebt. Da dieser letztere Gesichtspunkt der allgemeinste und fruchtbarste ist, so werde ich von nun an immer die Linien aus der Betrachtung der Gleichungen herleiten.

§. 87.

Von allen Gleichungen mit zwei unbestimmten Größen ist die vom ersten Grade die einfachste; sie gehört der geraden Linie an, der einfachsten unter allen Linien. Diese Gleichung kann unter der Form $Cy = Ax + B$ dargestellt werden. Wenn man sie aber durch C dividirt, so wird sie nichts an ihrer Allgemeinheit verlieren, und dann die Form $y = \frac{A}{C} x + \frac{B}{C}$

---

*) Eine Linie oder Fläche, welche alle die Punkte enthält, die einer unbestimmten geometrischen Aufgabe eine Genüge leisten, wird der Ort dieser Aufgabe oder der Gleichung genannt, auf welche sie leitet. Wenn (um zu dem Beispiel im Text noch ein paar hinzuzufügen) die Grundlinie und der Inhalt eines Dreiecks gegeben sind, so ist der Ort seiner Spitze eine gerade Linie. Wenn aus zwei gegebenen Punkten zwei gerade sich schneidende Linien gezogen werden sollen, die einen gegebenen Winkel mit einander bilden, so ist der Ort ihres Durchschnitts ein Kreis. Die alten Geometer haben viel über die Oerter geschrieben. Die verloren gegangenen zwei Bücher des Apollonius Pergäus über die ebenen Oerter (die gerade Linie und den Kreis) hat Robert Simpson nach dem von Pappus angegebenen Inhalt wieder hergestellt (Glasgow 1749), deutsch von Camerer). Uebers.

annehmen, wofür man $y = ax + b$ schreiben kann, indem man $\frac{A}{C} = a$ und $\frac{B}{C} = b$ setzt. Ich werde sie von nun an immer unter der letzteren Form betrachten.

Setzt man zuvörderst $b = 0$, so wird man haben

$$y = ax \text{ oder } \frac{y}{x} = a,$$

d. h. in der ganzen Länge der Geraden AE, *Fig.* 30, wird das Verhältniß von PM zu AP beständig sein. Diese Eigenschaft, welche nichts anders als der Ausdruck für die Aehnlichkeit der Dreiecke APM, AP′M′ . . . ist, aus welcher $\frac{PM}{AP} = \frac{P'M'}{AP'}$ . . . folgt, wo man auch die Punkte P, P′ . . . auf der geraden Linie AB annehmen mag, kann nur der durch A, den Anfangspunkt der Coordinaten, gelegten geraden Linie AE angehören.

Das Verhältniß $\frac{y}{x}$ oder der Coefficient a hängt von dem Winkel ab, den die Gerade AE mit der Axe der Abscissen bildet. Da nun in dem bei P rechtwinkligen Dreieck APM das Verhältniß von PM zu AP der Tangente des Winkels PAM gleich ist (§. 30), so wird a die Tangente dieses Winkels ausdrücken.

Betrachtet man nun die Gleichung $y = ax + b$, so sieht man, daß die neue Ordinate y von der vorigen $y = ax$ nur darin unterschieden ist, daß sie dieselbe um die Größe b übertrifft. Hieraus folgt, daß, wenn man $AD = b$ nimmt und die Linie DE parallel mit AE zieht, dieselbe der Ort der Gleichung $y = ax + b$ sein wird, weil man alsdann hat

$$PN = PM + MN = PM + AD$$
$$P'N' = P'M' + M'N' = P'M' + AD \text{ u. s. w.}$$

und es ist wohl zu merken, daß der Coefficient a für alle mit AE parallel gelegte Linien einerlei Werth behalten wird.

Es ist leicht einzusehen, daß in der Gleichung $y = ax + b$ nichts vorhanden ist, was den Werthen, die man der Größe x geben kann, Gränzen setzte, und daß folglich die von y so groß, als man nur immer will, werden können; da aber zu gleicher Zeit nichts den Fortgang der Linie DF in dem unbestimmten Raum BAC begränzt, so wird man immer Abscissen und Ordinaten finden können, die groß genug sind, um die Werthe von x und y, welche der vorgelegten Gleichung ein Genüge thun, darzustellen.

Setzt man $x = 0$, so wird man $y = b$ haben, und dieser Werth gehört zum Punkt D, wo die Gerade DF die Axe AC der Ordinaten durchschneidet. Ist x negativ, so findet man

$$y = -ax + b,$$

und wenn ax kleiner als b ist, so wird y positiv, aber kleiner als b oder AD sein. Man sieht, daß dies nur in dem Theil von FF′ statt finden kann, welcher zu Abscissen wie Ap gehört, die auf der entgegengesetzten Seite von den die positiven Werthe von x darstellenden Abscissen AP liegen; auf dieser Seite müssen daher die negativen Werthe von x genommen werden.

Um den Werth von x zu finden, welcher dem Punkt f, wo die Linie FF′ die Axe AB der Abscissen schneidet, entspricht, muß man, in der Gleichung $y = ax + b$, $y = 0$ setzen, woraus folgt

$$x = -\frac{b}{a} = Af.$$

Wenn x, immer negativ bleibend, größer als $\frac{b}{a}$ wird, so wird auch y negativ. Aber über den Punkt f hinaus befindet sich die Linie FF′ unterhalb AB; die Ordinate p′n′ wird daher auf die der vorigen entgegengesetzte Seite fallen, und die negativen Werthe von y müssen folglich auf eine Seite von AB getragen werden, welche der, auf die man die positiven getragen hat, entgegengesetzt ist.

Diese Betrachtungen, welche das in §. 76 gesagte bestätigen,

sind nicht der geraden Linie allein eigen. Man kann nicht Aufmerksamkeit genug auf sie wenden; denn von dem Gebrauch der negativen Größen in den Figuren hängen meistentheils die verschiedenen Formen ab, welche die krummen Linien annehmen können.

Da die Gleichung $y = ax + b$ nur zwei beständige Größen a und b enthält, deren Werth die jedesmalige gerade Linie von allen andern unterscheidet, so folgt, daß zwei Bedingungen hinreichen, um eine gerade Linie zu bestimmen. Diejenigen, welche sich zuerst darbieten, sind: sie durch zwei gegebene Punkte zu ziehen, oder sie auch nur durch einen gegebenen Punkt, aber zugleich einer gegebenen Linie entweder parallel oder senkrecht zu legen. Es wird für die Folge nöthig sein, die Formen zu kennen, welche die Gleichung $y = ax + b$ annehmen muß, wenn sie diesen verschiedenen Bedingungen Genüge leisten soll. Wir wollen daher jede insbesondere untersuchen.

§. 88.

Wenn man die Gleichung für die gerade Linie sucht, welche durch zwei Punkte gehen soll, deren Abscissen α und α' und deren Ordinaten β und β' sind, so muß man nach einander α und α' statt x, β und β' statt y setzen, und man wird zur Bestimmung von a und b die folgenden beiden Gleichungen haben:

$$\beta = a\alpha + b, \quad \beta' = a\alpha' + b,$$

woraus sich ergiebt

$$a = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}, \quad b = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha},$$

und es wird nun

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}\, x + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}$$

die Gleichung der gesuchten geraden Linie sein.

Diesem Resultat läßt sich eine einfachere Form geben; denn wenn man eine der obigen Gleichungen, z. B. die erste, von der

Gleichung $y = ax + b$ abzieht, so wird b verschwinden, und es wird entstehen

$$y - \beta = a(x - \alpha).$$

Diese letztere Gleichung ist die einer geraden Linie, welche durch den Punkt geht, dessen Coordinaten α und β sind, und mit der Axe AB einen durch a bestimmten Winkel bildet. Setzt man darin statt a den zuvor gefundenen Werth, so wird man haben

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha).$$

Der Abstand der beiden gegebenen Punkte, oder der Theil, welchen sie von der gesuchten Geraden zwischen sich fassen, wird zum Ausdruck haben

$$\sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2}.$$

Man wird dies leicht einsehen, wenn man annimmt, daß N und N' diese Punkte sind; denn da ihr Abstand NN' die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks NRN' ist, so folgt

$$\overline{NN'}^2 = \overline{NR}^2 + \overline{N'R}^2 = (AP' - AP)^2 + (P'N' - PN)^2 \text{ *)}.$$

---

*) Der Ausdruck für NN' müßte streng genommen mit dem doppelten Zeichen $\pm$ versehen sein. Denn wenn man nur nach der absoluten Entfernung der beiden Punkte N und N' fragt, so berücksichtigt man weder, ob sie in der Richtung vom Punkte N nach N' oder im entgegengesetzten Sinne von N' nach N, wodurch das Zeichen geändert werden würde (§. 74—76) genommen werden, noch welche von diesen beiden Richtungen das Zeichen + erhalten sollte. Wenn man aber in Bezug auf diese an sich ganz willkürliche Richtung übereingekommen ist, so wird die entgegengesetzte Richtung nothwendiger Weise durch das Zeichen — angedeutet werden. Es sei z. B. $y - \beta = a(x - \alpha)$ die Gleichung für die Gerade DF, so folgt daraus, daß $\beta' - \beta = a(\alpha' - \alpha)$ und
$NN' = \pm\sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2} = \pm(\alpha' - \alpha)\sqrt{1 + a^2}$
sein werde, woraus man ersieht, daß diese Entfernung NN' das Vorzeichen zugleich mit $\alpha' - \alpha$ ändert und daß der Punkt N' vor oder hinter dem Punkt N zu liegen kommen wird, je nachdem $\alpha' >$ oder $< \alpha$ ist. Verf. — Die in dem obigen §. auf analytischem Wege gefundenen Gleichungen lassen sich auch leicht aus der Figur ableiten. Es sei N, *Fig.* 30, ein durch seine Coordinaten α und β gegebener Punkt und die Gleichung für eine Gerade FF' zu finden, welche durch N gehend die AB unter einem durch die Tangente a bestimmten Winkel schneidet. Legt man eine Linie

§. 89.

Um die Gleichung der geraden Linie zu erhalten, welche durch den Punkt, dessen Coordinaten α und β sind, gehen, und der durch die Gleichung $y = a'x + b$ dargestellten parallel sein würde, ist es hinreichend, in der Gleichung $y - \beta = a(x - \alpha)$, welche schon der ersten Bedingung ein Genüge thut, a' statt a zu substituiren, weil nach §. 87 der Coefficient von x in den Gleichungen der geraden zu einander parallelen Linien unverändert bleibt; man wird also für die gesuchte erhalten

$$y - \beta = a'(x - \alpha)$$

§. 90.

Wenn endlich AE und AI, *Fig.* 33, zwei gerade auf einander senkrechte Linien sind, die durch den Anfangspunkt A der Coordinaten gehen, und man über der Abscisse AP die Ordinaten PM und PM′ errichtet, so findet man durch Vergleichung der ähnlichen Dreiecke APM und APM′, daß das Verhältniß von AP zu PM das umgekehrte von AP zu PM′ ist, so daß, wenn a der Coefficient von x in der Gleichung für AE ist (§. 87), $\frac{1}{a}$ der Coefficient in der Gleichung für AI sein wird. Da aber die Ordinaten der letzteren Linie unter AB liegen, so müssen sie nach §. 76 das Zeichen — erhalten; die Gleichungen der Geraden AE und AI werden mithin sein

---

HG von der letztern Eigenschaft durch P, also parallel mit FF′, so ist, wenn man $AP' = x$ und $P'N' = y$ setzt, $GP' = a$. $PP' = a(x - \alpha)$, mithin $y = P'N' = a(x - \alpha) + N'G = a(x - \alpha) + NP = a(x - \alpha) + \beta$, folglich $y - \beta = a(x - \alpha)$. Sollte die Gerade durch die in ihren Coordinaten α und β, α' und β' gegebenen Punkte N und N′ gehen, so ist $a = \frac{GP'}{PP'} = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}$ und $b = AD = DH - AH = NP - AH = \beta - a \cdot AP = \beta - a\alpha$, folglich $y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$ oder $y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}x + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}$.

Uebers.

$$y = ax, \quad y = -\frac{1}{a}x\ ^{*}).$$

Betrachtet man ferner die den Geraden AE und AI parallelen DF und GH, welche folglich senkrecht auf einander sind, so wird man für ihre Gleichungen finden

$$y = ax + b \text{ und } y = -\frac{1}{a}x + b' \text{ (§. 89).}$$

Wenn die zweite durch einen Punkt gehen soll, dessen Coordinaten α und β sind, so wird ihre Gleichung sein

$$y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha).$$

---

*) Man kann zu diesem Resultat gelangen, auch ohne Bezug auf §. 76 nehmen zu dürfen; denn die Neigung der beiden Geraden AM und AM', *Fig.* 74, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen, bestimmt die Form des Dreiecks MM'A, wenn M und M' zu einerlei Abscisse AP gehörige Punkte sind, und die Seiten dieses Dreiecks lassen sich vermittelst der Gleichungen der Geraden, die ich

$$y = ax \quad \text{und} \quad y = a'x$$

setze, leicht berechnen. Ist nämlich AP = x, so hat man PM = ax und PM' = a'x, also MM' = MP — M'P = ax — a'x, und die Dreiecke APM und APM' geben

$$\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2 = x^2 + a^2x^2,$$
$$\overline{AM'}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM'}^2 = x^2 + a'^2x^2.$$

Wird nun AM' senkrecht auf AM, also das Dreieck MAM' rechtwinklig, so wird

$$\overline{MM'}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AM'}^2,$$

welche Gleichung sich vermittelst obiger Werthe in

$$(ax - a'x)^2 = 2x^2 + a^2x^2 + a'^2x^2$$

verwandelt. Wird sie entwickelt und durch $2x^2$ dividirt, so erhält man

$$-aa' = 1, \text{ folglich } a' = -\frac{1}{a}, \text{ wie oben.}$$

Es verdient bemerkt zu werden, daß das Zeichen — hier die Veränderung andeutet, die mit der Figur vorgeht, wenn der Winkel MAM' ein rechter wird, welcher Umstand nicht mehr erlaubt, daß AM und AM' auf einerlei Seite der Axe AB liegen, wie man es zuerst angenommen hat. Die Algebra giebt also mit Bezug auf die Lage der Linien eine ganz ähnliche Berichtigung, wie man bei den numerischen Aufgaben durch die negativen Auflösungen erhält. (Man vergleiche die Anfangsgründe der Algebra.) Verf.

§. 91.

Zwei Linien, welche sich schneiden, haben in ihrem Durchschnittspunkt einerlei Coordinaten; man braucht daher, um die Coordinaten des Durchschnitts zweier durch die Gleichungen

$$y = ax + b,$$
$$y = a'x + b',$$

gegebenen Geraden zu finden, nur anzunehmen, daß die unbekannten x und y in beiden Gleichungen einerlei Werth haben. Auf diese Weise wird man haben

$$ax + b = a'x + b',$$

woraus folgt

$$x = \frac{b - b'}{a' - a} \text{ und } y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

Man sieht, vermittelst dieser Werthe von x und y, daß der Durchschnittspunkt desto weiter von den Axen AB und AC entfernt ist, je kleiner die Größe $a' - a$ wird, und daß x und y unendlich groß werden, wenn $a' = a$ ist, d. h. wenn die vorgelegten Linien parallel sind, oder aufhören sich zu schneiden.

§. 92.

Es kann nützlich sein, die Länge der von einem gegebenen Punkt auf eine gegebene gerade Linie herabgelassenen Senkrechten zu finden, und man gelangt hiezu, wenn man die Differenzen der Coordinaten dieses Punkts und desjenigen Punkts sucht, worin die gegebene gerade Linie der auf ihr senkrechten begegnet.

Ist die Gleichung der ersten

$$y = ax + b,$$

so wird die der zweiten

$$y - \beta = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$$

sein, wenn man die Coordinaten des gegebenen Punkts durch α und β bezeichnet (§. 90). Man kann aber die Gleichung $y = ax + b$ unter der Form

$$y - \beta = ax + b - \beta + a\alpha - a\alpha$$

oder

$$y - \beta = a(x - \alpha) + b - \beta + a\alpha$$

ansetzen, die gegen die Gleichung

$$y - \beta = -\frac{1}{a}(x - a)$$

gehalten

$$x - \alpha = \frac{a(\beta - a\alpha - b)}{1 + a^2}, \quad y - \beta = -\frac{\beta - a\alpha - b}{1 + a^2}$$

giebt. Substituirt man diese Werthe in dem Ausdruck

$$\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} \text{ (§. 88)},$$

so wird man für die Länge der gesuchten Senkrechten

$$\frac{\beta - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}}$$

erhalten *).

§. 93.

Das Vorhergehende führt uns auf den Ausdruck des Sinus, des Cosinus und der Tangente des Winkels, welchen zwei gegebene gerade Linien einschließen. Es seien

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b'$$

die Gleichungen der beiden geraden Linien. Es ist offenbar, daß der Winkel, den sie bilden, unverändert bleibt, wenn man beide, sich selbst parallel, so weit fortschiebt, bis sie durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen; alsdann werden sich ihre Gleichungen auf

$$y = ax, \quad y = a'x$$

reduciren (§. 87). In diesem Zustande will ich ich sie betrachten,

*) Diese Größe würde, nach dem was in der Anmerkung zu §. 90 gesagt worden ist, das doppelte Zeichen $\pm$ annehmen können. Nimmt man sie positiv, also $\beta > a\alpha + b$ an, so giebt man damit zu erkennen, daß der Punkt, aus welchem die Senkrechte gefällt ist, über der gegebenen Linie liegt; nimmt man sie dagegen negativ, mithin $\beta < a\alpha + b$, so liegt der Punkt unterhalb der gegebenen Linie. Verf.

und sie durch die Linien AM und AM′, *Fig.* 34, vorstellen. Nachdem man auf einer derselben einen Punkt M′ angenommen hat, dessen Coordinaten AP und M′P durch α und β bezeichnet werden sollen, so wird die von diesem Punkt auf die andere Linie AM herabgelassene Senkrechte M′M durch $\frac{\beta - a\alpha}{\sqrt{1 + a^2}}$ ausgedrückt sein, weil $b = 0$ ist (§. 92). Setzt man aber $AM' = r$, so hat man

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2,$$

und da der Punkt M′ in der Linie AM′ liegt, die zur Gleichung $y = a'x$ hat, so folgt $\beta = a'\alpha$. Diese Gleichung mit der vorigen combinirt giebt

$$\alpha = \frac{r}{\sqrt{1 + a'^2}}, \quad \beta = \frac{a'r}{\sqrt{1 + a'^2}}.$$

Substituirt man diese Werthe in dem der Senkrechten, so findet man

$$\frac{r\,(a' - a)}{\sqrt{(1 + a^2)\,(1 + a'^2)}},$$

und wenn man der Senkrechten M′M den Namen des Sinus giebt, den man ihr in der Trigonometrie beilegt, so wird man haben

$$\sin MAM' = \frac{r\,(a' - a)}{\sqrt{(1 + a^2)\,(1 + a'^2)}},$$

wenn man r für den Halbmesser nimmt.

Zieht man das Quadrat dieses Ausdrucks von r^2 ab, so wird man den für das Quadrat des Cosinus des Winkels MAM′ haben, nämlich

$$(\cos MAM')^2 = \frac{r^2\,(1 + a^2)\,(1 + a'^2) - r^2\,(a' - a)^2}{(1 + a^2)\,(1 + a'^2)}$$

$$= \frac{r^2\,(1 + 2aa' + a^2a'^2)}{(1 + a^2)\,(1 + a'^2)},$$

und wenn man die Quadratwurzel nimmt, so erhält man

cos

$$cos\ MAM' = \frac{r\ (1 + aa')}{\sqrt{(1 + a^2)\ (1 + a'^2)}}.$$

Endlich hat man für den Halbmesser r = 1

$$tg\ MAM' = \frac{sin\ MAM'}{cos\ MAM'} = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Man hätte diesen Werth unmittelbar aus der in der Tafel S. 35 beigebrachten Formel

$$tg\,(p \pm q) = \frac{tg\,p \pm tg\,q}{1 \mp tg\,p\ tg\,q}$$

herleiten können, weil der Winkel MAM' der Unterschied zwischen den Winkeln BAM' und BAM ist, und man daher, wenn diese letztern durch p und q bezeichnet werden,

$$tg\,p = a',\ tg\,q = a \text{ und } tg\,(p - q) = \frac{a' - a}{1 + aa'}$$

haben wird *); allein diese Formel beruht auf denen des eilften §en, welche wir vermittelst einer Construction erhalten haben, und ich habe mir vorgesetzt, aus den bloßen Gleichungen der Linien alles dasjenige abzuleiten, was zur Anwendung der Algebra auf die Geometrie erforderlich ist.

§. 94.

Die in §. 83 erhaltene Gleichung für den Kreis gilt nur für einen besonderen Fall, weil man den Mittelpunkt als den Anfangspunkt der Coordinaten angenommen und ihm dadurch eine bestimmte Lage gegeben hat. Um die Gleichung dieser krummen Linie zu verallgemeinern, muß man die Gleichung für den Kreis DED'E', *Fig.* 31, suchen, indem man den Punkt A''', welcher gegen den Mittelpunkt A eine beliebige Lage hat, als

---

*) Aus dem Werth $\frac{a' - a}{1 + aa'}$ für die Tangente lassen sich leicht die Ausdrücke für den Cosinus und Sinus herleiten, wenn man sich erinnert, daß für den Halbmesser 1, $sec\ p = \sqrt{1 + tg\,p^2}$, $cos\ p = \frac{1}{sec\ p}$, $sin\ p = \sqrt{1 - cos\,p^2}$ ist. Uebers.

Anfangspunkt der Coordinaten annimmt, und hierzu wird es hinreichend sein, analytisch auszudrücken, daß der Abstand eines jeden Punkts im Umkreise vom Mittelpunkt gleich r ist. Wenn man nun die Linien A‴A′ und A′A, welche dann die Coordinaten des Mittelpunks A mit Bezug auf die Axen A‴B′ und A‴C′ sind, durch p und q bezeichnet, und A‴Q = x, QM = y setzt, so wird man haben (§. 88)

$$AM = r = \sqrt{(x - p)^2 + (y - q)^2},$$

woraus sich, wenn man beide Theile quadrirt und entwickelt,

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = r^2$$

ergiebt.

Diese letztere Gleichung ist die allgemeinste, welche man für den Kreis erhalten kann, indem man ihn auf senkrechte Coordinaten bezieht; sie kann nur durch die Bestimmung der drei beständigen Größen p, q und r, von denen die beiden ersten die Lage des Mittelpunkts bestimmen, und die letzte den Halbmesser bezeichnet, für einen besonderen Fall eingerichtet werden. Hieraus folgt, daß drei Bedingungen erforderlich sind, um die Lage und Größe eines Kreises angeben zu können, und dies lehrt auch die Elementargeometrie.

Wollte man einen Kreis bestimmen, welcher durch drei Punkte geht, deren Coordinaten

α und β, α' und β', α'' und β''

sind, so würde man $\alpha, \alpha', \alpha''$ statt x und β, β', β'' statt y setzen, und auf diese Weise folgende drei Gleichungen bilden:

$$\alpha^2 - 2p\alpha + p^2 + \beta^2 - 2q\beta + q^2 = r^2$$
$$\alpha'^2 - 2p\alpha' + p^2 + \beta'^2 - 2q\beta' + q^2 = r^2$$
$$\alpha''^2 - 2p\alpha'' + p^2 + \beta''^2 - 2q\beta'' + q^2 = r^2,$$

welche nur drei unbekannte Größen, nämlich p, q und r enhalten.

Zieht man nach einander die erste von der zweiten und von der dritten ab, und läßt die sich aufhebenden Glieder weg, so wird man haben

$$2[(\alpha - \alpha')p + (\beta - \beta')q] - (\alpha^2 - \alpha'^2) - (\beta^2 - \beta'^2) = 0$$
$$2[(\alpha - \alpha'')p + (\beta - \beta'')q] - (\alpha^2 - \alpha''^2) - (\beta^2 - \beta''^2) = 0.$$

Diese beiden Gleichungen zeigen, indem sie bloß noch p und q, und zwar nur vom ersten Grade enthalten, daß der Mittelpunkt des verlangten Kreises nur eine einzige Lage haben kann, und, was den Halbmesser anlangt, so ist er, da man unmittelbar

$$r = \sqrt{\alpha^2 - 2p\alpha + p^2 + \beta^2 - 2q\beta + q^2}$$

erhält, nur einer einzigen Größe fähig; mithin kann man durch drei gegebene Punkte nur einen einzigen Kreis legen.

Da die Resultate der Auflösung obiger Gleichungen für das Folgende von keinem Nutzen sind, so werde ich sie nicht ausführen; nur bemerke ich, daß sie sich durch die Symmetrie der darin vorkommenden Größen abkürzen lassen, welche leicht auf die in der Elementargeometrie gegebene Construction führen würde.

§. 95.

Die allgemeine Gleichung des Kreises

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = r^2$$

kann auf verschiedene Arten vereinfacht werden, welche bemerkt zu werden verdienen, weil die Formen, die sie dann annimmt, häufig in der Analysis gebraucht werden.

Setzt man $p = 0$, $q = 0$, also den Mittelpunkt in den Anfangspunkt der Coordinaten, so erhält man wie oben (§. 83)

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Um den Anfangspunkt auf den Umfang des Kreises zu bringen, braucht man nur $p^2 + q^2 = r^2$ zu setzen; denn da $\sqrt{p^2 + q^2}$ den Abstand des Mittelpunkts vom Anfangspunkt ausdrückt, so folgt, daß dieser Abstand im gegenwärtigen Fall dem Halbmesser des Kreises gleich werden muß. Die Gleichung des Kreises wird also nun

$$x^2 - 2px + y^2 - 2qy = 0$$

sein.

Nimmt man endlich noch größerer Einfachheit wegen den Anfangspunkt der Coordinaten im Endpunkt D′ des Durch-

messers an, so wird, da sich dann der Mittelpunkt in der Axe der Abscissen befindet, die Ordinate desselben Null und seine Abscisse p dem Halbmesser r gleich werden, und die obige Gleichung verwandelt sich in

$$x^2 - 2rx + y^2 = 0 \text{ oder } y^2 = 2rx - x^2.$$

Die letztere und die erste Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ sind von den Gleichungen des Kreises diejenigen, deren man sich am häufigsten bedient *).

§. 96.

Nachdem das Vorhergehende wohl aufgefaßt ist, werden sich alle Aufgaben, die mit Hinsicht auf die gerade Linie und den Kreis vorkommen können, leicht auf die Algebra zurückführen lassen, ohne daß man andere Eigenschaften der Figuren, als die zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks statt findende Beziehung zu berücksichtigen braucht **). Es sei zuvörderst folgende Aufgabe vorgelegt.

---

*) Eine Vereinfachung der allgemeinen Gleichung

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = r^2$$

findet überhaupt in folgenden acht Fällen statt:

1) Der Kreis berührt die Axe der Abscissen. Dann ist $q = r$ und man hat $x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2ry = 0$.

2) Der Kreis berührt die Axe der Ordinaten. Dann ist $p = r$ und man hat $x^2 - 2rx + y^2 - 2qy + q^2 = 0$.

3) Der Kreis berührt beide Axen. Dann ist $p = q = r$ und man hat $x^2 - 2rx + y^2 - 2ry + r^2 = 0$.

4) Der Umkreis geht durch den Anfangspunkt der Coordinaten. Dann ist $p^2 + q^2 = r^2$ und man hat $x^2 - 2px + y^2 - 2qy = 0$.

5) Der Mittelpunkt liegt in der Axe der Abscissen. Dann ist $q = 0$ und man hat $x^2 - 2px + p^2 + y^2 = r^2$.

6) Der Mittelpunkt liegt in der Axe der Ordinaten. Dann ist $p = 0$ und man hat $x^2 + y^2 - 2qy + q^2 = r^2$.

7) Der Mittelpunkt liegt in einer der Axen und der Umkreis geht durch den Anfangspunkt der Coordinaten. Dann ist von den Größen p und q die eine $= 0$ und die andere $= r$ und man hat $x^2 - 2rx + y^2 = 0$.

8) Der Mittelpunkt liegt in dem Anfangspunkt der Coordinaten. Dann ist $p = q = 0$ und man hat $x^2 + y^2 = r^2$. Uebers.

**) Legendre leitet diese Beziehung in den seinen Elementen der

Es sind zwei gerade Linien AE und DE, *Fig.* 35, durch die Winkel, welche sie mit einer dritten AB bilden, und durch den Theil AD dieser dritten gegeben, welchen sie zwischen sich fassen; man soll in der auf AB Senkrechten AC einen Punkt G von der Lage finden, daß der Theil HK, welcher von der durch diesen Punkt mit AB parallel gelegten Geraden GK zwischen AE und DE enthalten ist, von einer gegebenen Größe sei *).

Um die Gleichungen der Geraden AE und DE zu bilden, seien a und a′ die Tangenten der Winkel EAD und EDA, welche sie mit der Geraden AB bilden. Diese Gerade werde als die Axe der Abscissen und A als Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten genommen. Die gegebene AD werde mit α bezeichnet. Die erste gerade Linie wird zur Gleichung $y = ax$ haben, weil sie durch den Punkt A geht; die zweite, welche durch den Punkt D gehen soll, für welchen $y = 0$ (§. 85) und $x = \alpha$ ist, wird

$$y = -a'(x - \alpha)$$

sein (§. 88), indem man zu erwägen hat, daß, wenn der Winkel EDB (nach derselben Richtung liegend wie EAD) stumpf ist, seine Tangente nach §. 25 die negativ genommene von EDA sein muß **). Die beiden Gleichungen sind also

$$y = ax, \quad y = -a'(x - \alpha).$$

Geometrie beigefügten Anmerkungen aus der Congruenz der Dreiecke vermittelst eines sehr eleganten Verfahrens her; allein seine Betrachtungen sind leider zu abstract, als daß sie einem Elementarbuche zur Grundlage dienen, und dem Geiste jene innige Ueberzeugung gewähren könnten, welche aus den durch unmittelbare Anschauung erhaltenen Begriffen hervorgeht. Verf. — Die gedachten Elemente sind von Crelle ins Deutsche übersetzt. Uebers.

*) Von derselben Aufgabe ist bereits in §. 75 die geometrische Auflösung gegeben worden. Uebers.

**) Der Winkel EDA, dessen Tangente = a′ gesetzt wird, kann nach der Seite von A hin ein spitzer, wie in der Figur, oder ein stumpfer

Um die Punkte H und K zu erhalten, wo die geraden Linien, welche durch diese Gleichungen dargestellt sind, von der zu AB parallelen GK geschnitten werden, braucht man bloß y = AG zu setzen. Wird nun AG mit t bezeichnet, so hat man

$$t = ax, \quad t = -a'(x - \alpha).$$

Nimmt man aus jeder dieser Gleichungen den Werth von x, so hat man

$$x = \frac{t}{a}, \quad x = \frac{a'\alpha - t}{a'}.$$

Diese Ausdrücke sind die der Abscissen Ah und Ak, deren Unterschied hk = HK ist, wegen des Parallelismus der Linien. Bezeichnet man durch m die Länge, welche HK haben soll, so wird man finden

$$m = \frac{a'\alpha - t}{a'} - \frac{t}{a},$$

woraus man zieht

$$aa'm = aa'\alpha - at - a't,$$

folglich

$$t = \frac{(\alpha - m)\, aa'}{a + a'}.$$

Dies ist der Werth von AG, welcher der vorgelegten Aufgabe Genüge leistet.

§. 97.

Wenn man die Linie HK, statt sie von einer bekannten Größe m anzunehmen, der Linie AG gleich setzt, oder, mit anderen Worten, ein Quadrat in ein Dreieck einschreiben will (§. 66), so hat man

---

sein. Im ersten Fall ist Kk = a' (α — x), wofür man — a' (x — α) schreiben kann; im zweiten hat man unmittelbar — a' (x — α), weil dann Kk von A über D hinaus liegt und *tg* EDB = — *tg* EDA ist. In beiden Fällen ist also

$$y = -a'(x - \alpha)$$

Uebers.

$$t = \frac{a'\alpha - t}{a'} - \frac{t}{a},$$

woraus folgt

$$t = \frac{a a' \alpha}{a + a' + a a'}.$$

§. 98.

Es sei noch folgende schon in §. 78 aufgelöste Aufgabe vorgelegt: **durch einen beliebigen Punkt E, *Fig.* 28, eine gerade Linie dergestalt zu legen, daß der Theil D′F′ dieser Geraden, welcher zwischen zwei einen rechten Winkel BAC einschließenden Linien liegt, von einer gegebenen Größe sei.**

Wenn α und β die Coordinaten des gegebenen Punkts E bezeichnen, so wird $y - \beta = - a (x - \alpha)$ die Gleichung der durch diesen Punkt gelegten Geraden ED′ sein. Um die Länge D′F′ zu erhalten, braucht man bloß AD′ und AF′ zu bestimmen, d. h. den Werth von y, wenn $x = 0$, und den von x, wenn $y = 0$ ist, welche Annahmen folgende Gleichungen geben:

$$y - \beta = a\alpha, \quad - \beta = - a (x - \alpha),$$

woraus man zieht

$$y = \beta + a\alpha = AD', \quad x = \frac{\beta + a\alpha}{a} = AF',$$

und da

$$F'D' = \sqrt{\overline{AD'}^2 + \overline{AF'}^2},$$

so folgt

$$F'D' = \sqrt{(\beta + a\,\alpha)^2 + \frac{1}{a^2}(\beta + a\,\alpha)^2}$$

$$= \frac{\beta + a\alpha}{a}\sqrt{1 + a^2}.$$

Setzt man $F'D' = m$, und erhebt die Gleichung zum Quadrat, um die Wurzelgröße wegzuschaffen, so entsteht

$$m^2 = \left(\frac{\beta + a\alpha}{a}\right)^2 (1 + a^2).$$

Wird diese Gleichung entwickelt und nach dem Buchstaben a geordnet, so verwandelt sie sich in

$$a^4 + \frac{2\beta}{\alpha} a^3 + \frac{\beta^2 + \alpha^2 - m^2}{\alpha^2} a^2 + \frac{2\beta}{\alpha} a + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 0,$$

eine Gleichung vom vierten Grade. Macht man $\beta = \alpha$, d. h. nimmt man den Punkt E in gleichem Abstande von den Axen AB und AC an, so erhält man

$$a^4 + 2a^3 + \frac{2\alpha^2 - m^2}{\alpha^2} a^2 + 2a + 1 = 0,$$

eine Gleichung, welche auf die mit (3) bezeichnete des 78sten §en zurückkommt, wenn man a in z und α in a verwandelt.

§. 99.

Ich werde jetzt die für die gerade Linie gefundenen Formeln auf die Untersuchung der vorzüglichsten Eigenschaften des Dreiecks anwenden. Zu diesem Ende nehme man zwei Punkte M und M′, *Fig.* 36, an, welche mit dem Anfangspunkt A irgend ein Dreieck bilden. Bezeichnet man nun die Coordinaten des ersten durch α, β, die des zweiten durch α', β', so werden die Abstände AM, AM′, MM′, welche die Seiten des Dreiecks ausmachen, sich nach §. 88 durch

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},\ \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2},\ \sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2}$$

ausdrücken lassen. Setzt man AM = c, AM′ = c′, MM′ = c″, so wird man folgende Gleichungen erhalten:

$$c^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$c'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2,$$

$$c''^2 = \alpha'^2 - 2\alpha'\alpha + \alpha^2 + \beta'^2 - 2\beta'\beta + \beta^2,$$

und wenn man die letzte von der Summe der beiden ersten abzieht, so entsteht

$$c^2 + c'^2 - c''^2 = 2(\alpha\alpha' + \beta\beta'),$$

also

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2}.$$

Die Gleichungen der Linien AM und AM′ werden sein

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x, \quad y = \frac{\beta'}{\alpha'} x \text{ (§.87)},$$

und der Cosinus des Winkels, welchen sie einschließen, wird zum Ausdruck haben (§. 93)

$$\frac{r\left(1 + \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\right)}} = \frac{r(\alpha\alpha' + \beta\beta')}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2)}}.$$

Setzt man, wie in den Sinustafeln, r = 1 und substituirt für $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha'^2 + \beta'^2$, $\alpha\alpha' + \beta\beta'$, ihre Werthe c^2, c'^2, $\frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2}$, so wird man erhalten

$$\cos \text{MAM}' = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2cc'},$$

eine Gleichung, welche eine Relation zwischen den drei Seiten und einem der Winkel des Dreiecks MAM′ angiebt (vergl. §. 38). Zieht man in Erwägung, daß der Winkel MAM′ der Seite MM′ = c″ gegenüber liegt, so wird man sich leicht überzeugen, daß man für die Winkel AMM′, AM′M, welche den Seiten AM′ = c′, AM = c gegenüber liegen, folgende Gleichungen erhalten müsse:

$$\cos \text{AMM}' = \frac{c^2 + c''^2 - c'^2}{2cc''},$$

$$\cos \text{AM}'\text{M} = \frac{c'^2 + c''^2 - c^2}{2c'c''}.$$

Bezeichnet man also die Winkel MAM′, AMM′, AM′M durch γ'', γ', γ, so wird man folgende drei Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned} c^2 + c'^2 - 2cc' \cos\gamma'' &= c''^2 \\ c^2 + c''^2 - 2cc'' \cos\gamma' &= c'^2 \\ c'^2 + c''^2 - 2c'c'' \cos\gamma &= c^2 \end{aligned}\right\} \text{(A)}.$$

Addirt man die erste und zweite, dann die erste und dritte,

endlich die zweite und dritte dieser Gleichungen, so wird man drei Resultate erhalten, welche nach einander durch 2c, 2c′, 2c″ theilbar werden, wenn man die den beiden Theilen einer jeden Gleichung gemeinschaftlichen Glieder weggelassen hat; es entsteht also

$$\left.\begin{array}{l} c - c' \cos\gamma'' - c'' \cos\gamma' = 0 \\ c' - c \cos\gamma'' - c'' \cos\gamma = 0 \\ c'' - c \cos\gamma' - c' \cos\gamma = 0 \end{array}\right\} (B).$$

Diese Gleichungen werden unmittelbar erhalten, wenn man nach einander von jeder Winkelspitze des Dreiecks auf die gegenüberstehende Seite eine Senkrechte fället, und die Abschnitte dieser Seite berechnet. Man hat nämlich *Fig.* 13

$$AD = AB \cos A, \quad CD = BC \cos C,$$

also $AD + CD = AC = AB \cos A + BC \cos C$.

Setzt man $AC = c$, $AB = c'$, $BC = c''$, $A = \gamma''$, $C = \gamma'$, so erhält man

$$c = c' \cos\gamma'' + c'' \cos\gamma'$$

oder

$$c - c' \cos\gamma'' - c'' \cos\gamma' = 0.$$

Auf eben diese Weise würde man zu den beiden andern Gleichungen gelangen.

§. 100.

Obgleich die Anzahl dieser Gleichungen drei ist, so kann man dennoch nicht die Seiten daraus finden, wenn die drei Winkel bekannt sind; denn wenn man die Werthe von c, c′, c″ vermittelst der allgemeinen Ausdrücke für die durch drei Gleichungen des ersten Grades bestimmten Unbekannten sucht, so wird man 0 finden, weil die bekannten Glieder fehlen. Allein eben diese Gleichungen verwandeln sich in

$$\left.\begin{array}{l} 1 - p \cos\gamma'' - q \cos\gamma' = 0 \\ p - \cos\gamma'' - q \cos\gamma = 0 \\ q - \cos\gamma' - p \cos\gamma = 0 \end{array}\right\} (C),$$

wenn man $\frac{c'}{c} = p$, $\frac{c''}{c} = q$ setzt; sie geben alsdann das

Verhältniß der Seiten des vorgelegten Dreiecks *), und außerdem eine Bedingungsgleichung, die man erhält, wenn man p und q eliminirt. Sie ist

$$1 - \cos\gamma^2 - \cos\gamma'^2 - \cos\gamma''^2 - 2\cos\gamma\cos\gamma'\cos\gamma'' = 0.$$

Der erste Theil ist der gemeinschaftliche Nenner der aus den oben gedachten allgemeinen Ausdrücken hergeleiteten Werthe der Unbekannten c, c', c''. Setzt man diesen Nenner gleich Null, so gehen die Werthe von c, c', c'' in $\frac{0}{0}$ über, und die Seiten bleiben folglich unbestimmt, wie es auch die mit den Gleichungen B vorgenommene Umformung zeigt.

Die Bedingungsgleichung, welche ich eben angeführt habe, enthält die Beziehung, in welcher die drei Winkel γ, γ' und γ'' zu einander stehen müssen, damit ihre Summe, der Natur des geradlinigen Dreiecks gemäß, zwei Rechte betrage. Um sich hiervon zu überzeugen, muß man vermittelst des Werths von $\cos(p \pm q)$ (§. 11) die Gleichung $\cos[2^q - (\gamma' + \gamma'')] = \cos\gamma$ entwickeln; man wird zuvörderst finden

$$-\cos(\gamma' + \gamma'') = \cos\gamma,$$

wenn man erwägt, daß $\sin 2^q = 0$ und $\cos 2^q = -1$ ist. Hiernächst erhält man

$$-\cos\gamma'\cos\gamma'' + \sin\gamma'\sin\gamma'' = \cos\gamma,$$

woraus folgt

$$\cos\gamma + \cos\gamma'\cos\gamma'' = \sin\gamma'\sin\gamma'',$$

also $$(\cos\gamma + \cos\gamma'\cos\gamma'')^2 = \sin\gamma'^2\sin\gamma''^2$$
$$= (1 - \cos\gamma'^2)(1 - \cos\gamma''^2),$$

und nach gehöriger Reduction wird man auf die obige Gleichung kommen.

Es verdient bemerkt zu werden, daß die Gleichungen A mit Bezug auf die geradlinigen Dreiecke eben das sind, was die Gleichungen B des 47sten §en mit Bezug auf die sphärischen,

*) Dies stimmt vollkommen mit dem überein, was die Elementargeometrie lehrt, daß die Winkel eines Dreiecks nicht die Größe, sondern bloß die Form desselben bestimmen. Uebers.

und daß sie vermittelst einfacher Umformungen auf die Formeln zur Auflösung der ersteren Dreiecke führen *).

§. 101.

Um den Flächeninhalt des Dreiecks MAM′, *Fig.* 36, zu erhalten, muß man vom Punkt A einen Perpendikel AD auf die Seite MM′ fällen, welche, indem sie durch die Punkte M und M′ geht, deren Coordinaten α und β, α' und β' sind, zur Gleichung haben wird (§. 88)

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$$

oder

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}x + \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\alpha' - \alpha}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen Form $y = ax + b$, so wird man finden

---

*) Die Gleichungen (A) geben unmittelbar die Auflösung der geradlinigen Dreiecke für den Fall, daß zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt sind, so wie die Gleichungen (B) des 47sten §en die der sphärischen für denselben Fall, und so wie diese letzteren Gleichungen durch leichte Umformungen die Formeln für alle übrigen Fälle des sphärischen Dreiecks darbieten, wie an seinem Ort gezeigt worden ist, so geben die Gleichungen (A) die für alle übrigen Fälle des geradlinigen. Wie daraus der Satz des 32sten §en gefolgert werde, verdient hier noch gezeigt zu werden. Aus den Gleichungen (C) findet man durch Elimination von q

$$p = \frac{1 - \cos\gamma'^{\,2}}{\cos\gamma'' + \cos\gamma\cos\gamma'}.$$

Man hat also

$$\frac{c'}{c} = \frac{1 - \cos\gamma'^2}{\cos\gamma'' + \cos\gamma\cos\gamma'} = \frac{\sin\gamma'^2}{-\cos(\gamma + \gamma') + \cos\gamma\cos\gamma'}$$

$$= \frac{\sin\gamma'^2}{-\cos\gamma\cos\gamma' + \sin\gamma\sin\gamma' + \cos\gamma\cos\gamma'} = \frac{\sin\gamma'^2}{\sin\gamma\sin\gamma'} = \frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma}.$$

Eben so erhält man aus den Gleichungen (C) durch Elimination von p

$$\frac{c''}{c} = \frac{\sin\gamma''}{\sin\gamma}.$$

Es erhellet also, daß in jedem geradlinigen Dreieck sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel verhalten.

Uebers.

$$a = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}\text{*)},\quad b = \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\alpha' - \alpha}.$$

Erwägt man aber, daß im 92sten §en die Buchstaben α und β die Coordinaten des Punkts bezeichnen, aus welchem die Senkrechte gezogen wird, welche Coordinaten im gegenwärtigen Fall Null sind, weil dieser Punkt der Anfangspunkt ist, so wird sich der Ausdruck

$$\frac{\beta - \alpha a - b}{\sqrt{1 + a^2}}$$

der Senkrechten auf

$$\frac{-b}{\sqrt{1 + a^2}} = - \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2}}$$

reduciren; und setzt man c'' statt $\sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2}$, so wird man erhalten

$$AD = \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{c''};$$

Vermittelst dieses Werths ergiebt sich für den Flächeninhalt des Dreiecks MAM′

$$\frac{MM' \times AD}{2} = S = \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{2},$$

ein Ausdruck, welcher dadurch bemerkenswerth ist, daß er den Flächeninhalt eines jeden Dreiecks, dessen Spitze in A liegt, vermittelst der Coordinaten der Scheitel der an der Grundlinie liegenden Winkel finden lehrt.

Man kann ihn in einen andern verwandeln, welcher bloß von den Seiten abhängt. Zu diesem Ende muß man die beiden Gleichungen

$$\alpha^2 + \beta^2 = c^2,\quad \alpha'^2 + \beta'^2 = c'^2$$

in einander multipliciren und vom Produkt das Quadrat von

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2}\ (\S. 99)$$

abziehen; man wird dann erhalten

---

*) α' ist hier kleiner als α, der Nenner wird also negativ, mithin auch a, wie es die Lage der Linie MM′ mit sich bringt. Uebers.

$$\alpha^2\beta'^2 + \alpha'^2\beta^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' = c^2c'^2 - \frac{(c^2 + c'^2 - c''^2)^2}{4}.$$

Nimmt man die Quadratwurzeln und bringt alle Glieder des zweiten Theils auf einerlei Nenner, so findet man

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{4c^2c'^2 - (c^2 + c'^2 - c''^2)^2},$$

und der Flächeninhalt des Dreiecks wird sein

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{4c^2c'^2 - (c^2 + c'^2 - c''^2)^2},$$

ein Ausdruck, dessen Entwickelung mit dem Resultat des 64sten §en übereinstimmt.

§. 102.

Wenn man sich nun einen vierten Punkt M″ vorstellt, dessen Coordinaten α'', β'' sind, und die Abstände AM″, MM″, M′M″ durch d, d′, d″ bezeichnet, so wird man haben

$$\alpha''^2 + \beta''^2 = d^2$$
$$(\alpha'' - \alpha)^2 + (\beta'' - \beta)^2 = d'^2$$
$$(\alpha'' - \alpha')^2 + (\beta'' - \beta')^2 = d''^2.$$

Entwickelt man die beiden letzteren Gleichungen und substituirt statt der Größen $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha'^2 + \beta'^2$, $\alpha''^2 + \beta''^2$ ihre Werthe c^2, c'^2, d^2, so wird man erhalten

$$c^2 + d^2 - 2(\alpha\alpha'' + \beta\beta'') = d'^2$$
$$c'^2 + d^2 - 2(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'') = d''^2;$$

und setzt man zur Abkürzung

$$\frac{c^2 + d^2 - d'^2}{2} = d_{,,} \quad \frac{c'^2 + d^2 - d''^2}{2} = d_{,,,}$$

so wird man haben

$$d_, = \alpha\alpha'' + \beta\beta'', \quad d_{,,} = \alpha'\alpha'' + \beta'\beta''.$$

Nimmt man in diesen Gleichungen die Werthe von α'' und β'', welche sind

$$\alpha'' = \frac{\beta' d_, - \beta d_{,,}}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \quad \beta'' = \frac{\alpha d_{,,} - \alpha' d_,}{\alpha\beta' - \alpha'\beta},$$

um sie in die Gleichung $\alpha''^2 + \beta''^2 = d^2$ zu setzen, und nimmt man dabei auch auf die Gleichungen

$$\alpha^2 + \beta^2 = c^2, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 = c'^2$$

Rücksicht, so wird man finden

$$c^2 d_{\prime\prime}^2 + c'^2 d_{\prime}^2 - 2 d_{\prime} d_{\prime\prime} (\alpha\alpha' + \beta\beta') = d^2 (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 \ldots (D).$$

Setzt man dann statt der Größen $\alpha\alpha' + \beta\beta'$ und $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ ihre in §. 99 und 101 erhaltenen Werthe

$$\frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2}, \quad \tfrac{1}{2}\sqrt{4 c^2 c'^2 - (c^2 + c'^2 - c''^2)^2},$$

und statt $d_{\prime}$ und $d_{\prime\prime}$ wieder

$$\frac{c^2 + d^2 - d'^2}{2}, \quad \frac{c'^2 + d^2 - d''^2}{2},$$

so wird diese Gleichung nur die sechs Abstände

AM, AM′, AM″, MM′, MM″, M′M″,

enthalten, welche die vier Seiten und die zwei Diagonallinien des Vierecks AMM′M″ bilden. Wenn die vier Seiten und eine Diagonale bekannt sind, so kann man die andere Diagonale daraus bestimmen.

§. 103.

Wollte man den Punkt M″ durch die Bedingung bestimmen, daß die drei Abstände AM″, MM″, M′M″ einander gleich sein sollen, so würde dieser Punkt der Mittelpunkt des um das vorgelegte Dreieck AMM′ beschriebenen Kreises werden, und es würde

$$d = d' = d'',$$

mithin

$$d_{\prime} = \frac{c^2}{2}, \quad d_{\prime\prime} = \frac{c'^2}{2}$$

sein. Die Gleichung (D) verwandelt sich dann in

$$c^2 c'^4 + c'^2 c^4 - 2 c^2 c'^2 (\alpha\alpha' + \beta\beta') = 4 d^2 (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2,$$

und wenn man für $\alpha\alpha' + \beta\beta'$ seinen Werth setzt, und erwägt, daß man, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks AMM′, der nach §. 101 $\frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{2}$ ist, durch S bezeichnet wird,

$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 = 4 S^2$$

erhalten müsse, so wird sich die Gleichung D auf

$$c^2 c'^2 c''^2 = 16 d^2 S^2$$

reduciren. Wir ziehen hieraus

$$d = \frac{c\,c'\,c''}{4\,S},$$

einen sehr einfachen Ausdruck für den Halbmesser des um das gegebene Dreieck beschriebenen Kreises, und wenn man in die Werthe von α'' und β'' statt $d_{,}$ und $d_{,,}$ ihre Werthe $\frac{c^2}{2}$ und $\frac{c'^2}{2}$ setzt, so erhält man die Coordinaten des Mittelpunkts des Kreises *).

§. 104.

Eben so leicht wird es sein, die Coordinaten des Mittelpunkts des eingeschriebenen Kreises, und den Halbmesser desselben zu finden. In diesem Fall befindet sich der Punkt M'', *Fig.* 37, innerhalb des Dreiecks in einer solchen Lage, daß die aus demselben auf die Seiten AM, AM', MM' gefällten Senkrechten M''D, M''E, M''F einander gleich sind. Um diesen Umstand analytisch auszudrücken, genügt es, die Gleichungen der drei Seiten zu bilden, und daraus vermittelst der Formel in §. 92 die Längen der von dem Punkte M'', dessen Coordinaten α'' und β'' sind, auf die Seiten gefällten Senkrechten herzuleiten. Nun sind diese Gleichungen

$$y = \frac{\beta}{\alpha}\,x, \quad y = \frac{\beta'}{\alpha'}\,x \ (\S.\ 87),$$

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}\,x + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha} \ (\S.\ 88);$$

die

---

*) Nämlich

$$\alpha'' = \frac{\beta' c^2 - \beta\, c'^2}{c\,c'\,c''} \,.\, d$$

$$\beta'' = \frac{\alpha\, c'^2 - \alpha' c^2}{c\,c'\,c''} \,.\, d.$$

Aus $d = \frac{c\,c'\,c''}{4S}$ folgt noch $S = \frac{c\,c'\,c''}{4d}$, eine sehr einfache Formel für den Inhalt des Dreiecks, durch die drei Seiten und den Halbmesser des umschriebenen Kreises ausgedrückt. Uebers.

die auf dieselben herabgelassenen Senkrechten werden demnach zum Ausdruck haben

$$M''D = \frac{\alpha\beta'' - \alpha''\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},\ M''E = \frac{\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}},$$

$$M''F = \frac{(\alpha' - \alpha)\beta'' - (\beta' - \beta)\alpha'' + \alpha\beta' - \alpha'\beta}{\sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2}},$$

wofür geschrieben werden kann

$$M''D = \frac{\alpha\beta'' - \alpha''\beta}{c},\ M''E = \frac{\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'}{c'},$$

$$M''F = \frac{-(\alpha\beta'' - \alpha''\beta) - (\alpha''\beta' - \alpha'\beta'') + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)}{c''},$$

indem man statt der Wurzelgrößen ihre Werthe c′, c′, c″ setzt.

Erinnert man sich nun, daß die Formel, welche die von einem Punkt auf eine Linie herabgelassene Senkrechte ausdrückt, durch eine Ausziehung der Quadratwurzel erhalten worden ist, und daß sie folglich sowohl positiv als negativ genommen werden kann, so wird man daraus schließen, daß jeder der obigen Ausdrücke zwei Werthe hat. Um bloß die positiven zu gebrauchen, muß man in Erwägung ziehen, daß, da sich nach der Figur die Linie AM′ von der Axe AB der Abscissen weiter als die Linie AM entfernt, und überdies der Punkt M″ zwischen der ersteren und letzteren liegt, man haben muß

$$\frac{\beta'}{\alpha'} > \frac{\beta''}{\alpha''},\ \frac{\beta'}{\alpha'} > \frac{\beta}{\alpha},\ \frac{\beta''}{\alpha''} > \frac{\beta}{\alpha},$$

oder, was einerlei ist

$$\alpha''\beta' > \alpha'\beta'',\quad \alpha\beta' > \alpha'\beta,\quad \alpha\beta'' > \alpha''\beta,$$

woraus folgt, daß man, um einen positiven Werth zu erhalten, dem Ausdruck der zweiten Senkrechten ein dem obigen entgegengesetztes Zeichen geben muß.

Da ferner der Punkt M″ unter der Geraden MM′ liegt, deren Gleichung

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}\, x + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}$$

ist, so muß

$$\beta'' < \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} \alpha'' + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha},$$

oder

$$\beta'' < \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} \alpha'' + \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha - \alpha'},$$

mithin

$$\alpha\beta'' - \alpha'\beta'' < \alpha''\beta - \alpha''\beta' + \alpha\beta' - \alpha'\beta$$

oder $\alpha\beta'' - \alpha''\beta + \alpha''\beta' - \alpha'\beta'' < \alpha\beta' - \alpha'\beta$

sein, eine Bedingung, nach welcher der Ausdruck für die dritte Linie positiv ist.

Wenn man nach diesen Betrachtungen

$$M''D = \frac{\alpha\beta'' - \alpha''\beta}{c} = e, \quad M''E = \frac{\alpha''\beta' - \alpha'\beta''}{c'} = e',$$

$$M''F = \frac{-(\alpha\beta'' - \alpha''\beta) - (\alpha''\beta' - \alpha'\beta'') + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)}{c''} = e''$$

setzt, und die Produkte ec, e′c′, e″c″ addirt, so erhält man nach den gehörigen Reductionen

$$ec + e'c' + e''c'' = \alpha\beta' - \alpha'\beta.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung ist leicht nachzuweisen; denn die Produkte ec, e′c′ e″c″ drücken die Flächeninhalte der Dreiecke AM″M, AM″M′, MM″M′ durch 2 multiplicirt aus; die Summe dieser Flächen ist der Fläche des ganzen Dreiecks AMM′ gleich, welche oben durch S bezeichnet worden ist, und man hat

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 2S \text{ (§. 101)}.$$

Wenn man $e = e' = e''$ setzt,

so hat man $$e = \frac{2S}{c + c' + c''},$$

und wenn $c = c' = c''$ ist, so entsteht

$$e + e' + e'' = \frac{2S}{c}.$$

Der erste dieser Ausdrücke ist der des Halbmessers des eingeschriebenen Kreises, und der zweite zeigt, daß, wenn man von irgend einem innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks

genommenen Punkt auf jede Seite desselben eine Senkrechte fällt, die Summe dieser Senkrechten der Höhe des Dreiecks gleich ist, weil man, wenn die Seite c zur Grundlinie genommen und die Höhe durch h bezeichnet wird,

$$S = \tfrac{1}{2}ch$$

erhält, welches giebt

$$e + e' + e'' = h \text{*)}.$$

Aus der bisher auseinandergesetzten Theorie ließen sich noch eine Menge anderweitiger Folgerungen ziehen; allein das Beigebrachte ist für meinen Zweck hinreichend, und ich will nur noch bemerken, daß es bei allen geradlinigen Vielecken Gleichungen giebt, die den unter (A) und (B) im 99sten §. entwickelten analog sind, auf dieselbe Weise erhalten werden, und eben so auf die Eigenschaften dieser Vielecke führen, wie die Gleichungen (A) und (B) auf die des Dreiecks. Lagrange hat eine Abhandlung über die Tetraëder geliefert, der das hier Vorgetragene als Einleitung dienen kann, und die sich leicht auf die vieleckigen Körper ausdehnen ließe, wenn man von den im fünften Kapitel des ersten Bandes meines Lehrbegriffs der Differential- und Integralrechnung beigebrachten Formeln Gebrauch machte **).

---

*) Man erhält noch $e = \frac{2S}{3c}$ für den Halbmesser des in ein gleichseitiges Dreieck eingeschriebenen Kreises. Uebers.

**) Man sehe auch die *Polygonométrie* von l'Huilier und seine *Polyédrométrie* im ersten Bande der *Mémoires présentés à l'Institut par des Savans étrangers;* die *Géométrie de position* von Carnot und sein *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances de cinq points quelconques pris dans l'espace.* Verf. — Lagrange's Abhandlung, welche den Titel führt: *Solution analytique de quelques problèmes sur les Pyramides triangulaires,* findet sich im Jahrgange 1773 der Denkschriften der Berliner Akademie. Von den vier Punkten im Raum, welche das Tetraëder bestimmen, werden drei durch Coordinaten auf eben so viele durch den vierten gelegte, einander senkrecht durchschneidende Ebenen bezogen und zwischen den gegenseitigen Abständen

§. 105.

Die Verbindung der Gleichung des Kreises mit der der geraden Linie leitet auf verschiedene Eigenschaften, welche aus dem Zusammentreffen dieser Linien folgen, und giebt die Auflösung aller der Aufgaben, in denen die Unbekannte nicht den zweiten Grad übersteigt.

Es seien $x^2 + y^2 = r^2$ und $y - \beta = a(x - \alpha)$ diese beiden Gleichungen. Sie zur Bestimmung von x und y anwenden oder sie so ansehen, als enthielten sie dieselben unbekannten Größen, heißt annehmen, daß die Punkte, denen die Coordinaten x und y angehören, zu gleicher Zeit im Umkreise und in der vorgelegten geraden Linie liegen, d. i. die Durchschnittspunkte beider Linien sein sollen; und im Allgemeinen ist offenbar, daß man, um die Durchschnittspunkte irgend zweier Linien zu finden, nur anzunehmen braucht, daß ihre Gleichungen dieselben unbekannten Größen enthalten.

Schafft man nun zuerst y dadurch weg, daß man dessen Werth aus der zweiten Gleichung nimmt, so erhält man

$$x^2 + (ax + \beta - a\alpha)^2 = r^2.$$

Wird diese Gleichung vom zweiten Grade entwickelt, so giebt sie zwei Werthe für x, weil die gerade Linie den Kreis in zwei Punkten schneiden muß; man kann aber zu einfacheren Resultaten gelangen, wenn man den Abstand des Punkts, dessen Coordinaten α und β sind, von einem der Durchschnittspunkte der geraden Linie und des Kreises für die Unbekannte nimmt. Bezeichnet man diesen Abstand durch z, so wird man haben (§. 88)

$$z = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}$$

woraus man zieht

$$z^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2,$$

---

dieser Punkte (den Kanten des Tetraëders) und den Coordinaten Gleichungen entwickelt, aus welchen die Eigenschaften des Tetraëders hergeleitet werden.

Uebers.

und setzt man für $y - \beta$ seinen Werth $a(x - \alpha)$, so wird entstehen

$$z^2 = (x - \alpha)^2 (1 + a^2),$$

woraus folgt

$$x - \alpha = \frac{z}{\sqrt{1 + a^2}},\ y - \beta = \frac{az}{\sqrt{1 + a^2}},$$

welches giebt

$$x = \alpha + \frac{z}{\sqrt{1 + a^2}},\ y = \beta + \frac{az}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Substituirt man diese letzteren Werthe in die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$, so verwandelt man sie in folgende:

$$\alpha^2 + \frac{2\alpha z}{\sqrt{1 + a^2}} + \frac{z^2}{1 + a^2} + \beta^2 + \frac{2\beta a z}{\sqrt{1 + a^2}} + \frac{a^2 z^2}{1 + a^2} = r^2,$$

welche sich auf

$$z^2 + \frac{2(\alpha + a\beta)}{\sqrt{1 + a^2}} z + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

reducirt, und erst z und dann x und y vermittelst der vorhergehenden Ausdrücke giebt.

Es ist offenbar, daß, wenn E, *Fig.* 38, derjenige Punkt ist, dem die Coordinaten α und β entsprechen, MNM′ der Kreis und EM die gerade Linie, a die Tangente des Winkels EeB ausdrücken und die beiden Werthe von z den Geraden EM und EM′ angehören werden.

§. 106.

Aus der Theorie der Gleichungen weiß man, daß das letzte Glied das Produkt aller Wurzeln ist. Bezeichnet man nun die der obigen Gleichung durch z' und z'', so wird man haben

$$z'z'' = \alpha^2 + \beta^2 - r^2,$$

einen Ausdruck, welcher, da er nicht von a abhängt, für jeden Werth dieser Größe unverändert bleibt, d. h. für jeden Werth des Winkels EeB, dessen Tangente sie ist; und da z' und z'' die beiden Linien EM und EM′ vorstellen, so ergiebt sich hieraus

daß das Produkt EM × EM′ für alle durch den Punkt E gezogene Linien einerlei Werth hat, oder daß man, wenn Em′ eine zweite Secante ist,

$$EM \times EM' = Em \times Em',$$

haben wird, woraus folgt, daß die Secanten EM′ und Em′ sich umgekehrt wie ihre außerhalb des Kreises liegenden Theile EM und Em verhalten, wie es in der Elementargeometrie bewiesen wird.

Wenn der Punkt E außerhalb des Kreises liegt, so hat man

$$\alpha^2 + \beta^2 > r^2,$$

weil $\alpha^2 + \beta^2$ das Quadrat des Abstandes des Punkts E vom Mittelpunkt A ausdrückt; liegt dieser Punkt aber innerhalb des Kreises, wie in *Fig.* 39, so haben die Größen z′ und z″ verschiedene Zeichen, weil das letzte Glied $\alpha^2 + \beta^2 - r^2$ negativ wird, indem dann $\alpha^2 + \beta^2 < r^2$ ist *). Aber immer bleibt das Produkt EM × EM′ unabhängig von der Neigung der Linie MM′ gegen AB; und wenn man durch den Punkt E, *Fig.* 39, eine zweite Sehne mm′ legt, so wird man haben

$$EM \times EM' = Em \times Em',$$

woraus folgt, was die Elementargeometrie beweist, daß zwei Sehnen in einerlei Kreise sich in umgekehrtem Verhältnisse schneiden, und man sieht, daß dieser Satz mit dem vorhergehenden eigentlich nur einen einzigen ausmacht, da beide aus einer und derselben Gleichung abgeleitet werden **).

---

*) Im ersten Fall haben z′ und z″ einerlei, im zweiten verschiedene Zeichen, d. h. im ersten Fall liegen z′ und z″ an einerlei, im zweiten an verschiedenen Seiten des Punkts E, wie es auch *Fig.* 38 und 39 zu erkennen geben. Uebers.

**) Auch in der Elementargeometrie lassen sich beide folgendermaßen in Einen zusammenziehen: wenn man durch irgend einen außerhalb oder innerhalb eines Kreises gelegenen Punkt zwei gerade den Kreis schneidende Linien zieht, so ist das Produkt der Entfernungen des Punkts von den Durchschnittspunkten der einen Linie gleich dem Produkt der Entfernungen von den Durchschnittspunkten der andern. Uebers.

Zieht man aus der Gleichung

$$z^2 + \frac{2(\alpha + a\beta)}{\sqrt{1 + a^2}} z + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

den Werth von z, so findet man

$$z' = \frac{-(\alpha + a\beta) + \sqrt{r^2(1 + a^2) - (\beta - a\alpha)^2}}{\sqrt{1 + a^2}},$$

$$z'' = \frac{-(\alpha + a\beta) - \sqrt{r^2(1 + a^2) - (\beta - a\alpha)^2}}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Dies sind die Ausdrücke für EM und EM'. Sie lassen sich vereinfachen, wenn man die Coordinaten dergestalt verändert, daß man die Abscissen vom Mittelpunkt A aus auf der geraden Linie, welche denselben mit E verbindet, und die Ordinaten nach wie vor auf der Abscissenaxe senkrecht stehend annimmt. Man wird alsdann haben

$$\beta = 0, \quad \alpha = AE,$$

$$z' = \frac{-\alpha + \sqrt{r^2(1 + a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1 + a^2}}$$

$$z'' = \frac{-\alpha + \sqrt{r^2(1 + a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1 + a^2}}$$

Die Gleichung des Kreises bleibt ungeändert; allein die der Geraden EM wird

$$y = a(x - \alpha).$$

§. 107.

Nimmt man den Punkt E außerhalb des Kreises an, so wird man haben

$$MM' = EM' - EM = \frac{2\sqrt{r^2(1 + a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1 + a^2}};$$

allein es ist offenbar *), daß diese Linie in dem Maaß abnimmt,

---

*) Besonders, wenn man den Ausdruck auf die Form

$$\frac{2\sqrt{r^2 - a^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{1 + a^2}}$$

bringt. Uebers.

wie sich die Linie EM, um den Punkt E sich drehend, vom Mittelpunkt des Kreises entfernt, und daß die Punkte M und M′ zusammenfallen, wenn diese Linie mit dem Umfange nur Einen Punkt gemein hat. Für diesen Punkt wird man also haben MM′ = 0, folglich

$$r^2 (1 + a^2) - a^2 \alpha^2 = 0$$

und

$$a = \frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}}.$$

Dies ist der Ausdruck für die Tangente des Winkels, welchen eine durch den Punkt E gelegte Berührungslinie EN des Kreises mit der Linie AE einschließen muß; und hiermit haben wir zugleich die algebraische Auflösung der Aufgabe: **von einem außerhalb des Kreises gegebenen Punkt eine Berührungslinie an den Kreis zu ziehen.**

§. 108.

Dieselben Betrachtungen werden auch dazu dienen, die durch einen im Umkreis beliebig angenommenen Punkt gelegte Berührungslinie zu bestimmen. Bezeichnet man, wie bisher immer, seine Coordinaten durch α und β, so wird man durch die Gleichung des Kreises, der diese Größen ein Genüge thun müssen,

$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2$$

erhalten, wodurch sich die Gleichung

$$z^2 + \frac{2(\alpha + a\beta)}{\sqrt{1 + a^2}} z + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

auf $z^2 + \frac{2(\alpha + a\beta)}{\sqrt{1 + a^2}} z = 0$

reducirt, und in diesem Zustande läßt sie sich in

$$z = 0 \text{ und } z + \frac{2(\alpha + a\beta)}{\sqrt{1 + a^2}} = 0$$

zerlegen; ihre Wurzeln werden demnach

$$z' = 0, \; z'' = -\frac{2(\alpha + a\beta)}{\sqrt{1 + a^2}}$$

sein. Der Unterschied dieser Werthe, oder die Länge des im Kreise liegenden Theils der Secante ist

$$\frac{2(\alpha + a\beta)}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Damit diese Größe verschwinde, muß

$$\alpha + a\beta = 0 \quad \text{oder} \quad a = -\frac{\alpha}{\beta}$$

sein, welches Resultat mit dem, was in der Elementargeometrie gelehrt wird, übereinstimmt; denn die durch den Mittelpunkt des Kreises und durch den Punkt, dessen Coordinaten α und β sind, gelegte Gerade, oder der Halbmesser AN, *Fig.* 38, hat zur Gleichung $y = \frac{\beta}{\alpha} x$ (§. 87), und da sich die Gleichung $y - \beta = a(x - \alpha)$ vermittelst des eben für a gefundenen Werths in $y - \beta = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha)$ verwandelt, so wird sie die gerade Linie ausdrücken, welche auf diesem Halbmesser senkrecht ist und durch den Punkt geht, dessen Coordinaten α und β sind, d. i. durch seinen Endpunkt N. (§. 90).

Wollte man den Abstand des Anfangspunkts A der Coordinaten von dem Punkt T finden, wo die Berührungslinie der Axe der Abscissen begegnet, so müßte man in der Gleichung für diese Linie $y = 0$ setzen, welches geben würde

$$-\beta = -\frac{\alpha}{\beta}(x - \alpha) \quad \text{und} \quad x = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} = \frac{r^2}{\alpha},$$

weil $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$ ist.

§. 109.

Vermittelst des Vorhergehenden kann man auch folgende Aufgabe auflösen: die Lage zu finden, welche eine durch den gegebenen Punkt E gezogene Linie EM haben muß, damit der im Kreise liegende Theil MM′ derselben von

einer gegebenen Größe m sei. Um zu einfacheren Ausdrücken zu gelangen, werde ich, wie zu Ende des 106ten §en, die Linie AE zur Abscissenaxe machen, und wenn man die im 107ten §en zwischen den beiden Werthen von z erhaltene Differenz = m setzt, so wird man haben

$$m = \frac{2\sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Schafft man die Wurzelzeichen weg, so entsteht

$$m^2(1+a^2) = 4r^2(1+a^2) - 4a^2\alpha^2,$$

woraus folgt

$$a = \frac{\sqrt{4r^2 - m^2}}{\sqrt{4\alpha^2 - 4r^2 + m^2}},$$

und substituirt man diesen Werth in $y = a(x - \alpha)$, so wird man die Gleichung der gesuchten geraden Linie erhalten (§. 106).

Dies ist aber bloß die analytische Auflösung der vorgelegten Aufgabe. Es kommt darauf an, den gefundenen Ausdruck zu construiren. Zu diesem Ende erwäge man zuvörderst, daß der Zähler $\sqrt{4r^2 - m^2}$ die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist, das $2r$ zur Hypotenuse und m zur anderen Kathete hat. Hierauf kann man dem Nenner $\sqrt{4\alpha^2 - 4r^2 + m^2}$ die Form $\sqrt{4\alpha^2 - (4r^2 - m^2)}$ oder $\sqrt{4\alpha^2 - (\sqrt{4r^2 - m^2})^2}$ geben, welche zeigt, daß derselbe ebenfalls die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist, das zur Hypotenuse 2α und zur andern Kathete $\sqrt{4r^2 - m^2}$ oder den Zähler hat, von dessen Construction so eben die Rede gewesen.

Bezeichnet man die beiden Linien, welche man so erhält, durch q und p, so hat man

$$a = \frac{q}{p},$$

und die Gleichung $y = a(x - \alpha)$ geht in

$$y = \frac{q}{p}(x - \alpha)$$

über. Nimmt man demnach, *Fig.* 38, vom Punkt E aus auf der Linie AE ein Stück EF = p und errichtet im Endpunkt F desselben den Perpendikel FG = q, so wird die gerade Linie, welche den Endpunkt dieser Senkrechten mit E verbindet, von der verlangten Eigenschaft sein, weil der Winkel FEG zur Tangente $a = \frac{q}{p} = \frac{FG}{EF}$ haben wird.

§. 110.

Aus dem Bisherigen ist klar, daß die Aufgaben der Geometrie nach zwei ganz verschiedenen Methoden behandelt werden können. Die eine besteht darin, daß man die Gleichungen der Linien bestimmt, welche die gesuchten Punkte enthalten, indem man von den Eigenschaften dieser Linien ausgeht; und die andere darin, daß man unmittelbar aus der Betrachtung der ähnlichen und rechtwinkligen Dreiecke, welche die aus der als aufgelöst angesehenen Aufgabe sich ergebende Figur nach einigen vorläufigen Hülfsconstructionen darbietet, die Relationen der geraden Linien entwickelt, welche die Lage dieser Punkte bestimmen.

Die erste dieser Methoden, welche oft eleganter als die zweite ist, ist zugleich die allgemeinere; allein die zweite ist oft einfacher, und dies muß natürlich der Fall sein, weil man bei ihrer Anwendung nicht so weit ausholt und von Eigenschaften ausgeht, welche den zu entdeckenden näher liegen *).

---

*) Ich habe den fruchtbaren und einförmigen Gang der ersten dieser Methoden in der Vorrede zu meinem Lehrbegriff der Differenzial- und Integralrechnung vorgezeichnet, und die Leser, welche die Anwendung davon noch näher kennen lernen wollen, werden sich durch die zweite Ausgabe von Hrn. Puissant's Werk *Recueil de diverses propositions de Géométrie* befriedigt finden. Verf. — Was der Hr. Verf. hier über die zwiefache Auflösungsmethode der geometrischen Aufgaben sagt, wird sehr gut durch die letzte Aufgabe erläutert, nämlich durch die: von einem außerhalb eines Kreises, *Fig.* 38, gegebenen Punkt E eine Linie dergestalt durch den Kreis zu legen, daß das zwischen den Durchschnittspunkte M und

§. 111.

Die Gleichung vom ersten Grade hat uns nur eine Art von Linien, nämlich die gerade, gegeben. Wir haben ferner gefunden, daß die Gleichung des Kreises vom zweiten Grade ist; allein diese Gleichung, die wir im 94sten §en unter der allgemeinsten Form erhalten haben, ist immer nur ein besonderer Fall dieses Grades, dessen Formel folgende ist:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F.$$

Es bleibt also noch übrig, die Curven zu entdecken, die den übrigen Fällen dieser Formel entsprechen. Ich bemerke zuvörderst, daß man sie, ohne ihre Allgemeinheit zu schmälern, folgendermaßen schreiben kann:

$$y^2 + \frac{B}{A}xy + \frac{C}{A}x^2 + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}x = \frac{F}{A},$$

und setzt man zur Abkürzung

$$\frac{B}{A} = b, \quad \frac{C}{A} = c, \quad \frac{D}{A} = d, \quad \frac{E}{A} = e, \quad \frac{F}{A} = f,$$

so wird man erhalten

$$y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = f.$$

M' liegende Stück von einer gegebenen, den Durchmesser nicht überschreitenden Länge m sei. Diese Aufgabe kann erstlich so aufgelöst werden, daß man für die zu ziehende Linie EM', in der die gedachten Punkte liegen, die Gleichung sucht. Sie ist, wie wir gesehen haben,

$$y = a(x - \alpha) = (x - \alpha)\sqrt{\frac{4r^2 - m^2}{4\alpha^2 - 4r^2 + m^2}},$$

wo r den Halbmesser des Kreises und α den Abstand des Punkts E vom Mittelpunkt oder vom Anfangspunkt der Coordinaten bezeichnet. Berechnet man nun aus dieser Gleichung für irgend eine Abscisse die zugehörige Ordinate, so ist die Lage der zu suchenden Linie gefunden. Auch kann man, wie gezeigt worden, auf die Gleichung eine Construction gründen, durch die sich die Lage ohne alle Rechnung ergiebt. Die Aufgabe kann aber zweitens ohne Hülfe der gedachten Gleichung gelöst werden. Man stellt sie durch eine Figur als bereits gelöst dar, und sieht nun sogleich, daß die Senkrechte AH von bestimmter Länge ist, indem man in dem rechtwinkligen Dreieck AM'H außer AM' auch M'H $= \frac{1}{2}$m kennt. Man kann also durch eine leichte Construction AH finden, und ist diese Linie bekannt, so darf man nur über AE einen Halbkreis beschreiben, und in denselben von A aus AH tragen, so hat man den Punkt H, durch welchen EM' gehen muß. Uebers.

Das erste Mittel, welches sich zur Bestimmung der Umstände des Laufs der gesuchten Curven darbietet, besteht darin, zu untersuchen, wie die Werthe der Ordinaten mit Bezug auf diejenigen fortschreiten, welche man den Abscissen beilegen kann, d. h. die obige Gleichung mit Hinsicht auf y aufzulösen. Geschieht dies, so findet man

$$y = -\tfrac{1}{2}(bx + d) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4(f - ex - cx^2) + (bx + d)^2}.$$

Entwickelt man die Größe unter dem Wurzelzeichen, und ordnet sie nach x, so wird man erhalten

$$y = \frac{-(bx + d) \pm \sqrt{(4f + d^2) - 2(2e - bd)x - (4c - b^2)x^2}}{2}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$4f + d^2 = p, \quad 2e - bd = n, \quad 4c - b^2 = m,$$

so wird man haben

$$y = -\frac{bx + d}{2} \pm \frac{\sqrt{p - 2nx - mx^2}}{2}.$$

Man sieht zuvörderst, daß der Werth von y aus zwei Theilen besteht, von denen der eine $-\frac{bx + d}{2}$ die Ordinate einer geraden Linie ist, welche $y = -\tfrac{1}{2}bx - \tfrac{1}{2}d$ zur Gleichung hat und construirt wird, wenn man auf der Axe AC′ unterhalb AB, *Fig.* 40, ein Stück AD $= \tfrac{1}{2}d$ nimmt, und durch den Punkt D eine gerade Linie DE dergestalt legt, daß sie auf der Seite, nach welcher die negativen Werthe von x genommen werden, einen Winkel DEA bildet, dessen Tangente $\tfrac{1}{2}b$ ist (§. 87), so daß, wenn man AP = x setzt, PN $= -\frac{bx + d}{2}$ sein wird. Es ist nun offenbar, daß man, um die zur gesuchten Curve gehörigen Punkte zu finden, in der Richtung von PN sowohl ober- als unterhalb der Linie ED Theile NM und NM′ tragen muß, welche der Größe

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{p - 2nx - mx^2}$$

gleich sind, weil man auf diese Weise haben wird

$$PM = -\tfrac{1}{2}(bx + d) + \tfrac{1}{2}\sqrt{p - 2nx - mx^2},$$
$$PM' = -\tfrac{1}{2}(bx + d) - \tfrac{1}{2}\sqrt{p - 2nx - mx^2}.$$

Die Linie DE besitzt also die merkwürdige Eigenschaft, daß sie alle zwischen zwei Punkten der Curve mit der Axe der Ordinaten AC parallel gezogenen Linien in zwei gleiche Theile theilt, und deshalb hat man ihr den Namen Durchmesser gegeben. Es findet jedoch zwischen ihr und den Durchmessern des Kreises der Unterschied statt, daß die letzteren alle Linien, welche sie in zwei gleiche Theile theilen, unter rechten Winkeln schneiden, während jene mit ihnen schiefe Winkel bildet; wir werden aber bald sehen, daß beiden Umständen einerlei Gesetz zum Grunde liegt *).

§. 112.

Die obige Gleichung würde sehr vereinfacht werden, wenn man die Geraden NM und NM' zu Ordinaten nähme, d. h. wenn man

$$y + \frac{bx + d}{2} = t$$

setzte. Dann erhielte man

$$t = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{p - 2nx - mx^2};$$

allein die Abscissen würden nun nicht mehr auf der Linie gerechnet sein, von welcher die Ordinaten ausgehen. Um sie dieser Bedingung zu unterwerfen, muß man sie auf dem Durchmesser DE nehmen, und dies geschieht, wenn man DN = s setzt und in Erwägung zieht, daß, wenn man DG mit AB parallel zieht,

$$DG = DN \cos D = s \cos D$$

sein wird. Der Winkel D ist dem Winkel E gleich, dessen

---

*) Aber nicht immer durchschneidet der Durchmesser der Curve die Ordinaten unter schiefen Winkeln. Denn ist b = d = 0, so hat man

$$y = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{p - 2nx - mx^2}$$

und der Durchmesser fällt in die Axe der Abscissen. Uebers.

Tangente $\frac{1}{2}$b ist; sein Cosinus wird demnach sein $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}b^2}}$ $= \frac{2}{\sqrt{4 + b^2}}$ (S. 36); und weil AP = DG, so wird folgen

$$x = \frac{2s}{\sqrt{4 + b^2}} = qs,$$

wenn man zur Abkürzung q statt $\frac{2}{\sqrt{4 + b^2}}$ schreibt. Wird nun dieser Werth von x in den von t gesetzt, so erhält man die Gleichung

$$t = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{p - 2nqs - mq^2s^2},$$

welche die Relation zu erkennen giebt, die für jeden Punkt der Curve zwischen s und t oder den Geraden DN und NM statt finden muß, und folglich ihre Gleichung mit Bezug auf die Coordinaten DN und NM ist *). Diese letztere Gleichung, obwohl einfacher, als die unmittelbar aus

$$y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = f$$

abgeleitete, ist dennoch eben so allgemein, weil die bisher vorgenommenen Umformungen keine besondere Bedingung eingeführt haben.

Da der Audruck für t mit einem Wurzelzeichen des zweiten Grades behaftet ist, so kann er nur in so fern reelle Werthe haben, als die Größe $p - 2nqs - mq^2s^2$ positiv ist. Die Untersuchung dieses Umstandes bietet verschiedene Fälle dar, welche ich nach einander abhandeln werde.

---

*) Bisher ist immer nur von rechtwinkligen Coordinaten die Rede gewesen. Bei den Curven aber, deren Gesetz die Gleichung

$$t = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{p - 2nqs - mq^2s^2}$$

ausdrückt, ist der Coordinatenwinkel CDE ein schiefer, und zwar ein solcher, dessen Sinus den Werth $q = \frac{2}{\sqrt{4 + b^2}}$ hat, weil *sin* CDE = *cos* GDN ist.

Uebers.

§. 113.

Ich nehme zuerst an, daß die Größe, welche in §. 111 durch m bezeichnet worden ist, positiv sei, und bringe den Ausdruck $p - 2nqs - mq^2s^2$ auf die Form

$$mq^2 \left(\frac{p}{mq^2} - \frac{2n}{mq} s - s^2\right),$$

um nur noch den Ausdruck

$$\frac{p}{mq^2} - \frac{2n}{mq} s - s^2$$

betrachten zu dürfen. Aus diesem läßt sich das Glied, worin s in der ersten Potenz vorkommt, wegschaffen, wenn man $= u - \frac{n}{mq}$ setzt*). Man erhält dann nach gehöriger Substitution und Reduction

$$\frac{pm + n^2}{m^2q^2} - u^2.$$

Um zu wissen, was u ist, genügt es, u durch s auszudrücken. Man erhält dann

$$u = s + \frac{n}{mq} = DN + \frac{n}{mq},$$

und sieht nun, daß der Anfangspunkt der u um eine Entfernung $OD = \frac{n}{mq}$ hinter den der s zu setzen ist, weil so

$$s = DN = ON - OD = u - \frac{n}{mq}$$

wird. Ist dies geschehen, so hat man

$$t = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{mq^2 \left\{\frac{pm + n^2}{m^2q^2} - u^2\right\}},$$

und

---

*) Der Verf. citirt hier No. 209 seiner Anfangsgründe der Algebra, wo er zeigt, daß man aus jeder geordneten höheren Gleichung

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + U = 0$$

das zweite Glied Px^{m-1} dadurch wegschaffen könne, daß man $u - \frac{P}{m}$ statt x substituirt. Uebers.

und es erhellet, daß der Ausdruck für t reell ist, so lange

$$u^2 < \frac{pm + n^2}{m^2 q^2}$$

bleibt, und Null wird, wenn

$$u^2 = \frac{pm + n^2}{m^2 q^2} \quad \text{oder} \quad u = \pm \sqrt{\frac{pm + n^2}{m^2 q^2}}$$

ist. Diese letzteren Werthe für u geben also die Punkte zu erkennen, wo der Durchmesser von der Curve geschnitten wird, und trägt man sie ihrem Zeichen gemäß zu jeder Seite vom Punkt O hin, so erhält man die gleich weit von O entfernt liegenden Punkte I und I'. Da über diese Punkte hinaus die Größe

$$\frac{pm + n^2}{m^2 q^2} - u^2$$

negativ wird, so werden die Ordinaten t imaginär, und es giebt keinen Punkt in der Curve, der zu Abscissen größer als OI und OI' gehörte. Sie liegt mithin ganz zwischen den Linien IH und I'H', die man durch I und I' den Ordinaten parallel zieht.

§. 114.

Da die beiden in u ausgedrückten Werthe von t sich nur in ihren Zeichen unterscheiden, und dieselben bleiben, man mag u positiv oder negativ annehmen, so folgt, daß zur Abscisse ON' = ON die der Ordinate NM' gleiche aber nach entgegengesetzter Richtung gezogene Ordinate N'M'' gehört, so daß die Dreiecke M''N'O und M'NO gleich sind, folglich die Gerade M'M'' im Punkt O halbirt ist. Wegen dieser dem Punkt O mit Bezug auf alle Punkte der Curve zukommenden Eigenschaft hat man ihm dem Namen **Mittelpunkt** gegeben, nach der Analogie vom Mittelpunkt des Kreises, jedoch mit dem Unterschiede, daß bei den übrigen Curven die Halbmesser nur paarweise gleich sind, weil die Durchmesser nicht gleiche Größe haben.

§. 115.

Die Gestalt der Curve, welche die Gleichung zwischen t und u darstellt, wird leicht durch die Construction dieser Gleichung erkannt, und um sie zu bewerkstelligen, setze ich zuvörderst

$$\frac{pm + n^2}{m^2 q^2} = a'^2,$$

und erhalte so

$$t = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{mq^2 (a'^2 - u^2)} = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{mq^2} \,.\, \sqrt{a'^2 - u^2}.$$

Wird nun a' für den Halbmesser eines aus O zu beschreibenden Kreises und u für die Abscisse genommen, so drückt der Faktor $\sqrt{a'^2 - u^2}$ die senkrecht über OI errichtete Ordinate dieses Kreises aus. Was den Faktor $\frac{1}{2}\sqrt{mq^2}$ betrifft, so sieht man, wenn man auf die Homogenität der Ausdrücke Rücksicht nimmt (§. 71), daß er nur ein Verhältniß ausdrücken darf *).

Ich werde dasselbe mit $\frac{b'}{a'}$ bezeichnen, folglich erhalten

$$\frac{b'^2}{a'^2} = \tfrac{1}{4} mq^2, \quad b'^2 = \frac{pm + n^2}{4m},$$

woraus sich ergiebt

$$t = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{a'^2 - u^2}.$$

Es erhellet also, daß die Ordinate NM gefunden wird, wenn man in der Proportion

$$a' : b' = \sqrt{a'^2 - u^2} : t$$

das vierte Glied sucht. Hat man so die Größe t für die Abscisse ON gefunden, so muß man sie auf die Linie MM' hintragen, und zwar wegen des Zeichens ± sowohl ober= als unterhalb DE.

---

*) Soll nämlich t durch Construction gefunden werden können, so muß $\frac{1}{2}\sqrt{mq^2}$ ein Verhältniß wie $\frac{b'}{a'}$ bezeichnen, weil nur so die Gleichung $t = \pm \frac{1}{2}\sqrt{mq^2} \,.\, \sqrt{a'^2 - u^2}$ oder $t^2 = \frac{1}{4} mq^2 \; (a'^2 - u^2) = \frac{b'^2}{a'^2} (a'^2 - u^2)$ homogen wird. Uebers.

Es ist offenbar, daß die Curve, die aus dieser Construction entsteht, eben so wie der Kreis geschlossen und ganz in dem Raum befindlich sein wird, der sich von $u = a'$ bis $u = -a'$ erstreckt, weil über diese Gränzen hinaus $\sqrt{a'^2 - u^2}$, die Ordinate des Kreises, imaginär wird.

Der größte Werth, den die Ordinate t haben kann, ist offenbar der, welcher dem Punkt O entspricht, für welchen $u = 0$ ist. In diesem Fall hat man

$$t = \pm b';$$

nimmt man also die Geraden OL und OL' gleich b', so werden die Punkte L und L' die Gränzen der Curve nach der Richtung der Ordinaten sein, so wie es die Punkte I und I' nach der Richtung der Abscissen sind.

§. 116.

Es ist wichtig zu bemerken, daß, wenn die durch a'^2 ausgedrückte Größe negativ ist, die Wurzelgröße $\sqrt{a'^2 - u^2}$ einen imaginären Werth hat und die vorgelegte Gleichung gar keine Linie giebt. Geht man auf den Werth von a'^2, nämlich $\frac{pm + n^2}{m^2 q^2}$ zurück, so sieht man, daß er negativ sein würde, wenn p mit dem Zeichen $-$ behaftet und zugleich $pm > n^2$ wäre.

Wenn in diesem Fall $pm = n^2$ ist, so wird (§. 115) $a' = 0$ und $b' = 0$; man behält aber immer $\frac{b'}{a'} = \frac{1}{2} \sqrt{mq^2}$, folglich ist

$$t = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{mq^2} \,.\, \sqrt{-u^2} = \pm \tfrac{1}{2}\, qu \sqrt{-m},$$

eine Gleichung der man genügt, wenn man $t = 0$ und $u = 0$ setzt. Man kann also sagen, daß die Curve sich dann auf den einzigen Punkt O reducirt, in welchem man $t = 0$ und $u = 0$ hat, und daß dieser Punkt die Gränze ist, der sich die durch obige Gleichung gegebene Curve bei allmäliger Verminderung der Durchmesser II' und LL' nähert *).

---

*) Ist p negativ und $pm < n^2$, so haben OI und OL mögliche Werthe. Man sieht, daß beide Linien dann um so kleiner werden, je näher

Erhebt man die beiden Theile der Gleichung

$$t = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{mq^2\left(\frac{pm + n^2}{m^2q^2} = u^2\right)}$$

zum Quadrat, so verwandelt sie sich in

$$t^2 = \tfrac{1}{4}\, mq^2\left(\frac{pm + n^2}{m^2q^2} - u^2\right)$$

und weiter in $4mt^2 + m^2q^2u^2 - pm - n^2 = 0.$

Ist p negativ, so wird die Gleichung

$$4mt^2 + m^2q^2u^2 + pm - n^2 = 0,$$

und wenn $pm > n^2$ ist, so kann der erste Theil, als die Summe dreier positiven Größen (denn auch m wird positiv angenommen), nichts anders = 0 werden, als wenn man einzeln die drei Gleichungen

$$4mt^2 = 0,\quad m^2q^2u^2 = 0 \quad \text{und} \quad pm - n^2 = 0$$

hat. Den beiden ersten kann man genügen, wenn man $t = 0$ und $u = 0$ setzt; aber die letzte drückt eine Bedingung aus, ohne welche die vorgelegte ganz ungereimt sein würde *).

---

pm dem Werth von n^2 kommt und in Null übergehen, wenn $pm = n^2$ wird, wo sich dann die Curve gleichsam im Punkt O concentrirt. Wächst das negative pm über diese Gränze hinaus, so drückt

$$t = \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - u^2}$$

gar keine Curve mehr aus, weil dann

$$a' = \sqrt{\frac{pm + n^2}{m^2q^2}} \quad \text{und} \quad b' = \sqrt{\frac{pm + n^2}{4m}}$$

imaginäre Werthe erhalten. Uebers.

*) Ein numerisches Beispiel zur Erläuterung des Bisherigen wird dem Anfänger vielleicht willkommen sein. Wenn man eine vollständige Gleichung des zweiten Grades zwischen rechtwinkligen Coordinaten, als

$$10y^2 + 5xy + 3x^2 + 9y + \frac{19}{2}x = 12$$

oder $y^2 + 0{,}5xy + 0{,}3x^2 + 0{,}9y + 0{,}95x = 1{,}2$

construiren soll, und man sich zuvor überzeugt hat, daß sie zu der in Rede stehenden Gattung von Curven gehört (für welche nämlich m positiv ist), so hat man

$$b = 0{,}5;\quad c = 0{,}3;\quad d = 0{,}9;\quad e = 0{,}95;\quad f = 1{,}2$$

und hieraus

§. 117.

Nehme ich nun zweitens an, daß m negativ ist, so wird sich die Größe $p - 2nqs - mq^2s^2$ in

$$p - 2nqs + mq^2s^2 = mq^2\left(\frac{p}{mq^2} - \frac{2n}{mq}s + s^2\right)$$

verwandeln. Man kann das Glied $-\frac{2n}{mq}s$ wegschaffen, wenn man $s = u + \frac{n}{mq}$ setzt, und da die Größe $\frac{n}{mq}$, welche DO vorstellt, hier das Zeichen + hat, so muß man sie, wie in *Fig.* 41, auf die Seite DF der positiven Abscissen tragen. Man erhält so den Mittelpunkt O, und die vorgelegte Gleichung verwandelt sich in

$$t = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{mq^2\left\{\frac{pm - n^2}{m^2q^2} + u^2\right\}}.$$

Setzt man $\frac{pm - n^2}{m^2q^2} = \pm a'^2$, je nachdem die Größe $pm - n^2$

$p = 4f + d^2 = 5{,}61 \qquad n = 2e - bd = 1{,}45$

$m = 4c - b^2 = 0{,}95 \qquad q = \frac{2}{\sqrt{4 + b^2}} = 0{,}9701$

$a' = \frac{\sqrt{pm + n^2}}{mq} = 2{,}96 \qquad b' = \sqrt{\frac{pm + n^2}{4m}} = 1{,}40$

$\frac{b'}{a'} = 0{,}47.$

Die umgeformte hier zu construirende Gleichung ist also

$$t = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - u^2} = \pm 0{,}47\sqrt{2{,}96^2 - u^2}.$$

Macht man nun für eine beliebig angenommene Einheit $AD = \frac{1}{2}d = 0{,}45$ und $AE = \frac{AD}{tgE} = \frac{d}{b} = 1{,}8$, zieht dann EDF und setzt $OD = \frac{n}{mq} = 1{,}57$, so wird zu jeder von O aus auf EF zu beiden Seiten genommenen Abscisse u die umgeformte Gleichung die zugehörige Ordinate t und mit ihr vier Punkte der Curve geben. Man kann aber auch eine beliebige Linie für EF und einen beliebigen Punkt für O setzen, nur muß dann der Coordinatenwinkel LOE so genommen werden, daß sein Sinus $= q = 0{,}9701$ ist, d. i. er muß im gegenwärtigen Fall $= 0^q{,}844$ sein.

Uebers.

positiv oder negativ ist, und macht man wieder $\frac{1}{4}mq^2 = \frac{b'^2}{a'^2}$, so wird man erhalten

$$t = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{u^2 \pm a'^2}.$$

Diese Gleichung scheint zwei verschiedene Fälle in sich zu begreifen; sie enthält indessen nur einen einzigen; denn wenn man ihre beiden Theile zum Quadrat erhebt, so findet man

$$t^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(u^2 \pm a'^2),$$

woraus folgt

$$a'^2t^2 - b'^2u^2 = a'^2b'^2,$$
$$b'^2u^2 - a'^2t^2 = b'^2a'^2.$$

Diese beiden Gleichungen sind nur in so fern verschieden, als in der zweiten a' und t die Stellen einnehmen, welche b' und u in der ersten haben, und umgekehrt; man braucht daher bloß zu untersuchen, was eine von beiden bedeutet.

Ich will die zweite näher betrachten. Man zieht daraus

$$t = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{u^2 - a'^2}.$$

Die Ordinate t wird construirt, wenn man zu den drei Linien a', b' und $\sqrt{u^2 - a'^2}$ die vierte Proportionallinie sucht. Die Linie $\sqrt{u^2 - a'^2}$ ist ihrerseits die mittlere Proportionale zwischen $u - a'$ und $u + a'$, und wird nur dann reell gefunden, wenn $u > a'$ ist. Die gesuchte Curve hat also von $u = 0$ bis $u = a'$ und von $u = 0$ bis $u = -a'$ keine reelle Ordinate, und da $u = a'$ und $u = -a'$ zugleich $t = 0$ geben, so folgt, daß diese Curve den Durchmesser DE in den Punkten I und I' schneidet, wo sich die der Größe a' gleichen Abscissen OI und OI' endigen, und daß sie sich nicht zwischen die der Axe der Ordinaten durch I und I' parallel laufenden Linien GG' und HH' erstreckt.

Ueber die Punkte I und I' hinaus ist $u > a'$, es sei nun a' positiv oder negativ, und die Ordinate t nimmt ohne Ende

zu, indem nichts der Größe, die sie erreichen kann, Schranken setzt. Nach diesen Betrachtungen sieht man leicht ein, daß der Lauf der Curve dem der Linien KIk und K'I'k' gleicht, welche durch den Zwischenraum II' von einander getrennt sind, und deren Zweige IK und Ik, I'K' und I'k' sich ins Unendliche erstrecken *).

Betrachtete man die Curve mit Bezug auf die Gerade LL', d. h. nimmt man t für die Abscisse und u für die Ordinate, so würde ihre Gleichung geben

$$u = \pm \frac{a'}{b'} \sqrt{t^2 + b'^2}.$$

Unter dieser Form kann u nicht kleiner als OI und OI' werden, und die Curve trifft ihren Durchmesser LL' nicht.

Hieraus ist offenbar, daß die Gleichung

$$a'^2 t^2 - b'^2 u^2 = a'^2 b'^2,$$

indem sie ebenfalls auf

$$t = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{u^2 + a'^2}$$

führt, zu einer Curve QLq und Q'L'q' von derselben Art wie KIk und K'I'k' gehört, welche aber gegen den Durchmesser LL der t eben so gerichtet ist, wie KIk und K'I'k' gegen den Durchmesser II' der u **).

---

*) Die Curve besteht also aus zwei abgesonderten Theilen KIk und K'I'k', welche ihre converen Seiten gegen einander kehren, und wovon jeder wieder zwei ins Unendliche fortlaufende Zweige hat. Uebers.

**) Man hat hier die beiden Formen

$$t = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{u^2 - a'^2}$$

und

$$t = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{u^2 + a'^2}.$$

Jene gehört zur Curve KIk, K'I'k', welche die Axe II' der Abscissen, und diese zur Curve QLq, Q'L'q', welche die Axe LL' der Ordinaten durchschneidet. Macht man LL' zur Axe der Abscissen und II' zur Axe der Ordinaten, so entstehen dieselben Formen und Curven, nur daß dann die

§. 118.

Wenn $a' = 0$ oder $pm - u^2 = 0$ wäre (§. 117), so würde sich der Ausdruck für t auf $t = \pm \frac{1}{2} \sqrt{mq^2 u^2}$ reduciren und folgende zwei verschiedene Gleichungen geben:

$$t = \tfrac{1}{2} qu \sqrt{m}, \quad t = -\tfrac{1}{2} qu \sqrt{m},$$

welche bloß zwei durch den Punkt O gezogene gerade Linien darstellen. Um sie zu construiren, nehme man eine Abscisse OR nach Belieben an; man wird dann erhalten

$$t = \pm \tfrac{1}{2} OR \,.\, q \sqrt{m},$$

und trägt man diese Werthe von R nach S und S′ und zieht OS und OS′, so werden dies die gedachten Geraden sein*).

Um nun mit diesen Geraden die Curve KIk zu vergleichen, will ich für irgend eine Abscisse $ON = u$ den Unterschied MV der correspondirenden Ordinaten NM und NV betrachten. Da die erste durch

$$\tfrac{1}{2} \sqrt{mq^2} \,.\, \sqrt{u^2 - a'^2} \text{ oder } \tfrac{1}{2} qu \sqrt{m} \,.\, \sqrt{1 - \frac{a'^2}{u^2}}$$

und die zweite durch

$$\tfrac{1}{2} qu \sqrt{m}$$

ausgedrückt ist, so ergiebt sich

$$MV = \tfrac{1}{2} qu \sqrt{m} - \tfrac{1}{2} qu \sqrt{m} \,.\, \sqrt{1 - \frac{a'^2}{u^2}}$$

Buchstaben u und t, a′ und b′ ihre Stellen vertauschen. In jedem Fall erhält man die Curve, welche die Axe der Abscissen durchschneidet, wenn das constante Glied unter dem Wurzelzeichen negativ ist, hingegen die Curve, welche die Axe der Ordinaten durchschneidet, wenn es positiv ist. Das gedachte Glied ist immer das Quadrat des halben Durchmessers, auf welchem die Abscissen gerechnet werden. Uebers.

*) Da $t = \frac{1}{2} qu \sqrt{m}$, so hat man $u : t = 1 : \frac{1}{2} q \sqrt{m} = 1 : \frac{b'}{a'} = a' : b'$. Man erhält also t auch dadurch, daß man eine vierte Proportionale zu a′, b′ und u oder zu OI, OL und OR sucht. Legt man GG′ durch I parallel mit CC′, macht $IG = IG' = OL$ und zieht OG und OG′, so sieht man, daß dies die in Rede stehenden geraden Linien sein werden. Uebers.

$$= \frac{1}{2} qu \sqrt{m} \left\{1 - \sqrt{1 - \frac{a'^2}{u^2}}\right\}.$$

Der Unterschied $1 - \sqrt{1 - \frac{a'^2}{u^2}}$ läßt sich leichter schätzen, wenn man den Ausdruck $\sqrt{1 - \frac{a'^2}{u^2}}$ entwickelt. Da nun die Quadratwurzel des ersten Gliedes 1 ist, so setze man

$$\sqrt{1 - \frac{a'^2}{u^2}} = 1 + z,$$

und man wird haben

$$1 - \frac{a'^2}{u^2} = 1 + 2z + z^2.$$

Je größer man aber u annimmt, desto kleiner wird der Bruch $\frac{a'^2}{u^2}$, und um desto weniger wird die Wurzel $1 + z$ von der Einheit verschieden sein. Läßt man daher *) in der obigen Gleichung z^2 weg, so wird man haben

$$z = -\frac{a'^2}{2u^2}.$$

Um sich diesem Werthe noch mehr zu nähern, setze man $z = -\frac{a'^2}{2u^2} + z'$, und kann nun auf eine ähnliche Weise z' bestimmen, wofür man $-\frac{a'^4}{8u^4}$ finden wird u. s. w. **). Man wird also haben

*) Nach der in den Elementen der Algebra §. 215 gegebenen Methode. Verf.

**) Man kann sich auch der binomischen Formel zu dieser Entwickelung bedienen. Verf. — In der Gleichung $\sqrt{1 - \frac{a'^2}{u^2}} = 1 + z$ ist $\frac{a'}{u}$ ein ächter Bruch, weil u allemal größer als a' sein muß; also ist auch $\sqrt{1 - \frac{a'^2}{u^2}}$ oder $1 + z$ ein ächter Bruch und z ein negativer ächter Bruch. Man kann mithin, wenn man die Gleichung zum Quadrat erhebt,

$$MV = \tfrac{1}{2} qu\sqrt{m}\left\{1 - 1 + \frac{a'^2}{2u^2} + \frac{a'^4}{8u^4} + \ldots\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} q\sqrt{m}\left\{\frac{a'^2}{2u} + \frac{a'^4}{8u^3} + \ldots\right\},$$

woraus erhellet, daß MV desto kleiner wird, je größer man u annimmt, ohne jedoch jemals Null werden zu können.

Hieraus folgt, daß sich die Curve den Geraden OS und OS' um so mehr nähert, je mehr sie sich vom Punkt O entfernt, ohne sie jedoch je erreichen zu können, so daß diese Geraden die Gränzen der Theile KIk, K'I'k' der vorgelegten Curve sind, welche niemals aus dem Winkel SOS' und seinem Scheitelwinkel hinausgehen können *).

---

z^2 vernachläßigen und erhält so $1 - \frac{a'^2}{u^2} = 1 + 2z$ oder $z = -\frac{a'^2}{2u^2}$. Es ist also $1 - \frac{a'^2}{2u^2}$ ein genäherter Werth von $\sqrt{1 - \frac{a'^2}{u^2}}$. Um sich dem wahren Werth dieser Wurzelgröße noch weiter zu nähern, setze man $\sqrt{1 - \frac{a'^2}{u^2}} = 1 - \frac{a'^2}{2u^2} + z'$, und erhebe diese Gleichung zum Quadrat; man hat dann $1 - \frac{a'^2}{u^2} = \left(1 - \frac{a'^2}{2u^2}\right)^2 + 2z'$, indem man das Produkt $-\frac{a'^2}{u^2} \cdot z'$ und mit um so größerem Recht das Quadrat von z' vernachlässigt. Es ist also

$$0 = \frac{a'^4}{4u^4} + 2z'$$

und $z' = -\frac{a'^4}{8u^4}$. Man hat demnach

$$\sqrt{1 - \frac{a'^2}{u^2}} = 1 - \frac{a'^2}{2u^2} - \frac{a'^4}{8u^4} - \ldots$$

Leichter erhält man dies Resultat durch die binomische Formel. Uebers.

*) Man sieht leicht, daß die Linien OS und OS' in demselben Verhältnisse zur Curve QLq und Q'L'q' stehen; geht man nämlich auf die Gleichung

$$u = \frac{a'}{b'}\sqrt{t^2 - b'^2} = \frac{2}{q\sqrt{m}} \cdot \sqrt{t^2 - b'^2} = \frac{2t}{q\sqrt{m}}\sqrt{1 - \frac{b'^2}{t^2}}$$

dieser Curve zurück, so überzeugt man sich, daß die Linien OS und OS' für sie eben die Eigenschaft haben, wie für die Curve KIk und K'I'k', daß sich also diese Linien beiden Curven ohne Ende nähern. Uebers.

§. 119.

Im Fall, daß $m = 0$ ist, hat man bloß

$$t = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{p - 2nqs}.$$

Man bringt die unter dem Wurzelzeichen befindliche Größe auf ein einziges Glied, wenn man

$$\frac{p}{2nq} - s = u$$

setzt, und durch dieses Mittel erhält man

$$t = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{2nqu} \quad \text{oder} \quad t = \pm \sqrt{e'u},$$

wenn man $\frac{1}{2}nq$ durch e' ausdrückt. Man sieht leicht, daß diese Gleichung für $u = 0$ auch zugleich $t = 0$ giebt, und daß folglich der Punkt des Durchmessers DE, *Fig.* 42, den man zum Anfangspunkt der Werthe von u macht, in der gesuchten Curve liegt. Um diesen Punkt zu finden, muß man in der Gleichung

$$u = \frac{p}{2nq} - s$$

$u = 0$ setzen; dann findet man $s = \frac{p}{2nq}$, und wenn man diese Größe auf ED an der Seite der positiven Abscissen hinträgt, so wird man den Punkt I erhalten, in welchem die vorgelegte Curve die Linie ED schneidet.

Wenn die Größe e' positiv ist, so kann man u nur positiv nehmen; allein nichts begränzt ihre Größe, eben so wenig wie die von t, so daß die Curve sich auf dieser Seite ins Unendliche ausdehnen muß, wie es die Linie MIM′ zeigt. Sie würde nach der entgegengesetzten Seite gekehrt erscheinen, wenn e' negativ wäre, weil man alsdann auch u negativ nehmen müßte. Aber immer kann sie sich nur nach Einer Seite hin erstrecken.

Die Gleichung $t = \pm \sqrt{e'u}$ wird construirt, wenn man eine mittlere Proportionallinie zwischen der Abscisse $IN = u$ und einer geraden Linie sucht, welche der e' gleich ist; das Resultat ist die Ordinate NM, die man hier, so wie in den vorhergehenden Fällen, sowohl unter als über DE hintragen muß.

Es ist zu bemerken, daß die ursprüngliche Gleichung

$$t = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{p - 2nqs}$$

sich auf $t = \pm \frac{1}{2} \sqrt{p}$ reducirt, wenn $n = 0$ ist. Die Curve, die in diesem Sen betrachtet worden ist, verwandelt sich dann in zwei gerade Linien, welche der Axe der s in einer Entfernung $\frac{1}{2} \sqrt{p}$ zu beiden Seiten parallel laufen. Diese Linien nähern sich der Axe, so wie p kleiner wird, und vereinigen sich mit derselben, wenn $p = 0$ ist, und in diesem Fall wird die Axe selbst der Ort der vorgelegten Gleichung.

§. 120.

Nach dem Bisherigen (§. 113 — 119) kann die Gleichung

$$y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = f$$

nur eine von folgenden drei Formen annehmen:

$$t = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{a'^2 - u^2},$$

$$t = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{u^2 - a'^2},$$

$$t = \pm \sqrt{e'u},$$

oder mit Wegschaffung der Wurzelzeichen:

$$a'^2 t^2 + b'^2 u^2 = a'^2 b'^2,$$

$$b'^2 u^2 - a'^2 t^2 = a'^2 b^2,$$

$$t^2 = e'u,$$

je nachdem $m = 4c - b^2$, positiv, oder negativ, oder Null ist. Die Größe $4c - b^2$ kommt mit dem Werthe $\frac{4AC - B^2}{A^2}$ (§. 111) überein, und dieser ist mit $4AC - B^2$ von gleichem Zeichen. Die drei Gleichungen sind auch in der einzigen

$$t = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{p - 2nqs - mq^2 s^2}$$

begriffen.

Die durch die erste dargestellten Curven, welche in sich selbst zurückkehren und einen Raum einschließen (§. 115), werden **Ellipsen** genannt. Diejenigen, auf welche die zweite führt, und welche aus zwei abgesonderten Theilen, jede mit zwei ins

unendliche fortlaufenden Zweigen bestehen (§. 117), heißen **Hyperbeln**, und die Geraden, zwischen denen sie eingeschlossen sind (§. 118), **Asymptoten**. Die dritte Gleichung endlich ist die der **Parabeln** (§. 119).

Um die Untersuchung aller in der allgemeinen Formel

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F$$

begriffenen Fälle zu beendigen, ist nur noch der zu betrachten, wo die beiden Coefficienten A und C Null sind; denn wenn gleich die bisherigen Umformungen keine Anwendung finden, wenn $A = 0$ ist, so kann doch die Gleichung, wenn das Glied Cx^2 vorhanden ist, mit Bezug auf x aufgelöst werden, und die Formeln der vorhergehenden §§en bleiben immer noch gültig, wenn man y in x und x in y verwandelt, d. i. aus der Axe der Ordinaten die der Abscissen macht; aber der Fall, wo A und C beide Null sind, ist gar nicht unter diesen Formeln begriffen, weil die Gleichung, auf die Form

$$Bxy + Dy + Ex = F$$

reducirt, in Rücksicht auf beide Coordinaten nur vom ersten Grade ist. Dieser Fall verdient daher noch eine besondere Erwägung.

Ich setze die letztere Gleichung unter der Form

$$xy + dy + ex = f$$

an, auf welche sie sich allemal bringen läßt, und habe so

$$y = \frac{f - ex}{x + d};$$

woraus erhellet, daß die Ordinate nie unmöglich werden kann.

Macht man zuvörderst $y = 0$, so findet man

$$x = \frac{f}{e}.$$

Dies ist die Abscisse des Punkts E, *Fig.* 75, wo die gesuchte Curve die Axe AB der x schneidet. Sie geht dann unter dieselbe hinab, weil y negativ ist, wenn $x > \frac{f}{e}$ wird. Ist $x = 0$,

so ist $y = \frac{f}{d}$, und dieser Werth zeigt den Punkt F an, in welchem die Curve die Axe AC der y trifft.

Auf die negative Seite der Axe der x übergehend, fährt die Ordinate y fort zu wachsen, weil der Nenner $-x + d$ dann mit dem wachsenden x abnimmt und Null wird, wenn $x = d$ ist. In diesem Fall zeigt der unendliche Werth, den man für y erhält, an, daß die Curve nicht die Gerade SS′ erreichen kann, welche man über der Abscisse $AG = -d$ senkrecht errichtet.

Wenn x, negativ bleibend, über d hinaus wächst, so ändert y das Zeichen, ist aber anfangs größer, als jede noch so große Linie. Man sieht also, daß man unterhalb AB auf der andern Seite von SS′ einen Zweig K′I′, ähnlich dem vorigen KI, anzunehmen hat, der sich jedoch nach umgekehrter Richtung erstrecken muß, indem er sich der AB in demselben Maaße nähert, als die negative Abscisse wächst.

Es ist nur noch übrig, zu untersuchen, was aus y wird, wenn das positive oder negative x unaufhörlich zunimmt. Zu diesem Ende dividire ich den Zähler und den Nenner des Ausdrucks für y durch x und erhalte so

$$y = \frac{\frac{f}{x} - e}{1 + \frac{d}{x}},$$

ein Resultat, welches sich, wie man sieht, ohne Ende dem Werth $-e$ nähert, indem die Brüche $\frac{f}{x}$ und $\frac{d}{x}$ mit dem wachsenden x fortwährend kleiner werden. Zieht man daher in einer Entfernung $AH = e$ unterhalb AB eine Gerade S″S‴ parallel mit dieser Axe, so hat man eine Gränze, der sich die Zweige Ik und I′k′ unaufhörlich nähern, und es erhellet, daß die Theile KIK und K′I′k′ der gesuchten Curve nicht über die Scheitelwinkel SOS″ und S′OS‴ hinausgehen können.

Dies genügt, um die Analogie darzuthun, die zwischen der so eben betrachteten Curve und der, welche man Hyperbel nennt, statt findet; es würde selbst leicht sein, die Gleichung der letzteren in die vorgelegte zu verwandeln, wenn man für die Axe der Coordinaten die in §. 118 angedeuteten Asymptoten nähme. Ich werde mich hiebei nicht aufhalten, da ich durch ein allgemeineres Verfahren auf diesen Gegenstand zurückkommen muß (§. 129). Für jetzt beschränke ich mich darauf, zu zeigen, daß, wenn man in unserer Figur die Coordinaten vom Punkt O an rechnet, in welchem sich die Asymptoten SS′ und S″S‴ schneiden, indem man

$$x = t - d \quad \text{und} \quad y = u - e$$

setzt, die vorgelegte Gleichung in

$$ut = f + de$$

übergeht, aus welcher Form sogleich erhellet, daß die beiden Zweige einander ähnlich sind.

§. 121.

Jede der Gleichungen von S. 188 scheint auf die einfachste Form gebracht zu sein; allein die Coordinaten sind nicht auf einander senkrecht, wie bei den Gleichungen der geraden Linie und des Kreises, von denen ich bisher Gebrauch gemacht habe *). Indessen ist die Lage der Ordinaten mit der der Absciffen durch die Bedingung verbunden, daß jene mit der Geraden, welche die Curve im Endpunkt des Durchmessers berührt, parallel laufen. Um sich hievon zu überzeugen, braucht man bloß in Erwägung zu ziehen, daß die Punkte M und M′, *Fig.* 40, 41 und 42, sich

---

*) Nur wenn

$$q = \frac{2}{\sqrt{4 + b^2}} = 1$$

oder $b = 0$ ist, also in der allgemeinen Gleichung

$$y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = f$$

das zweite Glied fehlt, ist der Coordinatenwinkel ein rechter. Dann giebt aber die Gleichung den Kreis. Uebers.

in I zu einem einzigen vereinigen, welcher Umstand den wesentlichen Charakter der Berührungspunkte ausmacht (vergl. §. 107). In der That wird die Summe der beiden Ordinaten oder der Abstand der Punkte M und M', welcher bei der Ellipse durch $\frac{2b'}{a'}\sqrt{a'^2 - u^2}$, bei der Hyperbel durch $\frac{2b'}{a'}\sqrt{u^2 - a'^2}$, und bei der Parabel durch $2\sqrt{e'u}$ ausgedrückt ist, im Punkt I gleich Null, wo man bei den ersten beiden Curven $u = a'$ und bei der dritten $u = 0$ hat.

Da die Gleichung der Ellipse in Rücksicht auf die beiden unbestimmten t und u symmetrisch ist, dergestalt daß der Ausdruck der u in t dieselbe Form hat, wie der der t in u, so könnte man auch die t für die Abscissen und die u für die Ordinaten nehmen, und würde finden, daß der Durchmesser II', *Fig.* 40, auch seinerseits der durch den Punkt L gelegten Tangente parallel ist. Da also die Durchmesser II' und LL' einerlei Eigenschaften haben, so werden sie aus diesem Grunde **conjugirte** oder **verbundene Durchmesser** genannt*). Es ist offenbar, daß im Kreise die conjugirten Durchmesser auf einander senkrecht sein müssen, weil die durch den Endpunkt eines jeden Durchmessers gelegte Tangente auf demselben senkrecht ist. Die Anzahl der mit dieser Eigenschaft behafteten Durchmesser ist für den Kreis unendlich. Ganz anders verhält es sich mit der Ellipse; indessen hat diese Curve, von der uns die obige Analyse nur zwei einander schief schneidende Durchmesser kennen gelehrt hat, dessen ungeachtet zwei, welche sich unter einem rechten Winkel schneiden, wie man weiter unten sehen wird.

Vergleicht man die bisherigen Betrachtungen über die allgemeine

---

*) Man sagt, der eine sei dem andern **zugeordnet**. Außer den beiden conjugirten Durchmessern, auf die uns die bisherige Analyse geleitet hat, ist jede andere durch den Mittelpunkt O der Ellipse gezogene Linie ein Durchmesser, dem irgend ein anderer zugeordnet ist, wie unten erhellen wird. Bei der Hyperbel findet etwas analoges statt. Uebers.

allgemeine Gleichung der zweiten Ordnung mit dem, was in §. 87 und 94 von der Geraden und der Kreislinie gesagt worden ist, so wird man sich leicht überzeugen, daß die Gleichung einer und derselben Linie nach der Lage der Coordinaten, auf die man sie bezieht, sehr verschiedene Formen annimmt. Es kann daher nützlich sein, zu wissen, wie man die Coordinaten umzuwandeln hat, um zu denen gelangen zu können, welche für die vorgelegte Gleichung die einfachste Form geben. Ich werde demnach die allgemeinen Formeln entwickeln, durch welche sich die Coordinaten einer Curve in andere verwandeln lassen, welche sowohl zu den ersten als unter einander jede beliebige Lage haben.

§. 122.

Die größte Aenderung, die man in das System der Coordinaten bringen kann, ohne daß man aufhört, sie gerade und zu zwei bestimmten Linien parallel zu nehmen, besteht darin, daß man ihnen einen neuen Anfangspunkt urd andere Richtungen giebt. Ich werde gleich diesen allgemeinen Fall betrachten, und annehmen, es werde verlangt, die Werthe der Coordinaten $AP = x$, $PM = y$, *Fig.* 43, welche sich auf die Axen AB und AC beziehen, durch zwei andere Coordinaten $A'''P'' = t$, $P''M = u$, mit Bezug auf die Axen A'''B'' und A'''C'' auszudrücken, deren Lage gegen die ersten bekannt sein soll.

Nachdem ich durch den neuen Anfangspunkt A''' die Geraden A'''B' und A'''C' mit AB und AC parallel gezogen habe, werden die Abstände AA' und A'A''' der Voraussetzung nach gegeben sein, und wenn man sie durch α und β bezeichnet, so wird man haben

$$AP = A'P + AA' = A'''P' + \alpha,$$
$$PM = P'M + A'A''' = P'M + \beta.$$

Zieht man dann durch den Fußpunkt P'' der neuen Ordinate P''M die Linien P''Q und P''R, jene mit AB, diese mit AC parallel, so ist klar, daß man, da die Lage der Axen A'''B''

und $A'''C''$ mit Rücksicht auf AB und AC gegeben ist, nothwendig alle Winkel der Dreiecke $A'''P''R$, $P''MQ$ kennen muß, oder, was einerlei ist, die Verhältnisse ihrer homologen Seiten. Setzt man daher

$$\frac{A'''R}{A'''P''} = m, \quad \frac{P''R}{A'''P''} = n, \quad \frac{P''Q}{P''M} = p, \quad \frac{MQ}{P''M} = q,$$

so wird man haben

$$A'''R = m \,.\, A'''P'' = mt, \quad P''R = n \,.\, A'''P'' = nt,$$
$$P''Q = p \,.\, P''M = pu, \quad QM = q \,.\, P''M = qu,$$

woraus man zieht

$$A'''P' = A'''R + P''Q = mt + pu,$$
$$P'M = P''R + QM = nt + qu,$$

und endlich

$$x = AP = A'''P' + \alpha = mt + pu + \alpha,$$
$$y = PM = P'M + \beta = nt + qu + \beta.$$

Dies sind die allgemeinsten Werthe, welche die Coordinaten x und y, die unter einander irgend einen Winkel einschließen, annehmen können, wenn man sie durch andere Coordinaten von eben der Art und von beliebiger Lage ausdrückt. Wir wollen nun sehen, wie sie sich für die verschiedenen besondern Fälle, die hier vorkommen können, modificiren.

1) Wenn man die neuen Coordinaten den ersten parallel setzt und bloß die Lage des Anfangspunkts ändert, so werden die Linien $A'''C''$ und $A'''C'$, so wie $A'''B''$ und $A'''B'$ zusammenfallen, und man wird haben

$$m = 1, \; n = 0, \; p = 0 \text{ und } q = 1,$$

woraus folgt

$$x = t + \alpha, \quad y = u + \beta,$$

was leicht *a priori* einzusehen ist, weil dann $A'''P''$ und $A'''P'$, so wie $P''M$ und $P'M$, nur eine Linie bilden.

Setzt man α oder β gleich 0, so bleibt entweder die Axe AC oder die Axe AB an ihrer Stelle.

2) Wollte man bloß die Richtung der Axen ändern, und ließe den Anfangspunkt in A, so würde man zugleich haben

$$\alpha = 0 \text{ und } \beta = 0,$$

woraus sich ergeben würde

$$x = mt + pu, \quad y = nt + qu.$$

Man sieht, daß, wenn man $m = 1$ und $n = 0$ setzt, woraus $x = t + pu$ und $y = qu$ folgen würde, die Linie $A'''B''$ auf $A'''B'$ fällt, und daß folglich bloß die Richtung der Ordinaten geändert ist. Eben so sind $x = mt$ und $y = nt + u$ die Werthe von x und y, welche einer bloßen Aenderung der Richtung der Abscissen entsprechen *).

§. 123.

Es ist zu bemerken, daß zwischen den Größen m, n, p und q, welche von der Richtung der Coordinaten abhängen, eine nothwendige Beziehung anzutreffen ist, so daß man nicht alle vier nach Belieben wählen kann. Denn wenn man den Winkel der ursprünglichen Axen $A'''B'$ und $A'''C'$ kennt und sich die Winkel $B''A'''B'$ und $C''A'''B''$ giebt, so ist die Lage der neuen Axen $A'''B''$ und $A'''C''$ durch diese drei Dinge völlig bestimmt. Wenn man also von den Größen m, n, p und q drei kennt, so construirt man leicht die Axen der beiden Coordinatensysteme. Man zieht nämlich, wenn m, n und p bekannt sind, zuerst eine beliebige Linie als die Axe $A'''B'$, nimmt auf derselben einen willkürlichen Theil $A'''R$ an, und zeichnet das Dreieck $A'''RP''$, dessen Seiten $A'''R$, $P''R$ und $A'''P''$ sich wie m, n und 1 zu einander verhalten; die Seite $P''R$ wird der Axe $A'''C'$ parallel sein und die Seite $A'''P''$ die Axe $A'''B''$ geben. Es ist dann noch die Lage der Axe $A'''C''$ zu bestimmen, und dies geschieht, wenn man durch einen beliebigen

---

*) Man kann auch noch den Fall setzen, daß der Anfangspunkt der Coordinaten und entweder bloß die Richtung der Ordinaten oder bloß die der Abscissen geändert wird. Im ersten Fall erhält man

$$x = t + pu + \alpha, \quad y = qu + \beta,$$

im zweiten

$$x = mt + \alpha, \quad y = nt + u + \beta.$$

Uebers.

Punkt P′ der Axe A‴B′ eine Linie P′M der Axe A‴C′ parallel zieht, P″Q mit der Axe A‴B′ parallel legt und P″Q zu P″M in das Verhältniß p : 1 bringt. So entsteht das Dreieck P″MQ, dessen Seite P″M der Axe A‴C″ parallel läuft und worin das Verhältniß der Seiten P″M und QM die Größe q giebt.

Wenn man von einem bekannten Coordinatensystem zu einem anderen gleichfalls bekannten übergeht, so werden die Größen m, n, p und q, den gegebenen Definitionen gemäß berechnet, zu einander die Beziehung haben, von welcher eben geredet worden ist; allein es folgt aus dem Gesagten, daß man, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten gegeben ist, die Richtung der neuen Axen nicht dergestalt bestimmen kann, daß sie mehr als zwei verschiedenen Bedingungen ein Genüge thun, und daß in den Ausdrücken

$$x = mt + pu + \alpha, \quad y = nt + qu + \beta$$

die Größen x und y, t und u nicht die Coordinaten von einerlei Punkt mit Bezug auf zwei verschiedene Systeme gerader und paralleler Coordinaten sein können, wenn m, n, p, und q nach Belieben gewählt werden. Hier ist ein einfaches Mittel die Beziehung zu finden, welche zwischen diesen Größen bestehen muß.

Wenn man durch den Punkt M die Geraden MG und MH auf A‴B′ und A‴B″ senkrecht zieht, und die Winkel MP′B′ = C′A‴B′ und MP″B″ = C″A‴B″ als bekannt annimmt, so wird man das Verhältniß von P′M zu P′G und das von P″M zu P″H haben. Bezeichnet man das erste durch g und das zweite durch h, so hat man

$$P'G = P'M \times g \quad \text{und} \quad P''H = P''M \times h;$$

zieht man dann A‴M und bezeichnet A‴P′ und P′M durch x′ und y′, so werden die schiefwinkligen Dreiecke A‴P′M und A‴P″M geben

$$\overline{A'''M}^2 = \overline{A'''P'}^2 + \overline{P'M}^2 + 2A'''P' \times P'G$$
$$= x'^2 + {}'^2 + 2gx'y',$$

$$\overline{A'''M}^2 = \overline{A'''P''}^2 + \overline{P''M}^2 + 2A'''P'' \times P''H$$
$$= t^2 + u^2 + 2htu.$$

Setzt man diese Ausdrücke von $\overline{A'''M}^2$ einander gleich, so wird man erhalten

$$x'^2 + y'^2 + 2gx'y' = t^2 + u^2 + 2htu,$$

und substituirt man nun für x' und y' ihre Werthe $mt + pu$ und $nt + qu$, so wird man haben

$$(m^2 + n^2 + 2gmn)\, t^2 + (p^2 + q^2 + 2gpq)\, u^2$$
$$+ 2[mp + nq + g(np + mq)]\, tu$$
$$= t^2 + u^2 + 2htu.$$

Da diese Gleichung statt haben muß, welches auch die Lage des Punkts M sein mag, so muß sie sich auch immer unabhängig von t und u bestätigen, eine Bedingung, welche folgende drei Gleichungen giebt:

$$m^2 + n^2 + 2gmn = 1,\quad p^2 + q^2 + 2gpq = 1,$$
$$mp + nq + g(np + mq) = h.$$

Schafft man aus den beiden ersten g weg, so wird das Resultat

$$(m^2 + n^2)\, pq - (p^2 + q^2)\, mn = pq - mn$$

die Bedingungen ausdrücken, welchen die Größen m, n, p und q genügen müssen.

§. 124.

Man nimmt am häufigsten an, daß sich die neuen Coordinaten u und t, eben so wie die ursprünglichen, unter einem rechten Winkel schneiden; in diesem Fall werden sich die obigen Gleichungen sehr vereinfachen. Da die Winkel $MP'B'$ und $MP''B''$ rechte werden, so verschwinden $P'G$ oder gy' und $P''H$ oder hu; man hat also bloß

$$m^2 + n^2 = 1$$
$$p^2 + q^2 = 1$$
$$mp + nq = 0,$$

woraus man folgert

$$m^2 = 1 - n^2,\quad p^2 = 1 - q^2,$$
$$m^2p^2 = 1 - n^2 - q^2 + n^2q^2;$$

und da $mp = -nq$, so kommt

$$n^2 + q^2 = 1.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit der Gleichung $m^2 + n^2 = 1$, so findet man $q = m$, woraus $p = -n$ folgt; man hat also endlich

$$x' = mt - nu,\quad y' = nt + mu,$$

wobei zu erwägen ist, daß die Größen m und n vermöge der Gleichung $m^2 + n^2 = 1$ von einander abhängen.

Die 44ste Figur, welche für diesen Fall construirt ist, zeigt, daß m der Cosinus des Winkels $B''A'''B'$ und n der Sinus dieses Winkels ist, und daß man hat

$$A'''P' = A'''R - P''Q = mt - nu,$$
$$P'M = P''R + QM = nt + mu,$$

wie ich es eben gefunden habe *).

---

*) Nichts würde leichter sein, als die Bezeichnungen durch die Buchstaben m, n, p und q nicht allein in diesem Fall, sondern auch in Allem, was vorhergeht, in die Sinus und Cosinus der zwischen den Axen der Coordinaten enthaltenen Winkel zu verwandeln, und man würde dann die in mehreren nach der Bekanntmachung der ersten Ausgaben dieses Werks erschienenen Büchern vorkommenden Formeln erhalten; allein die von mir angenommene Bezeichnung kürzt die Ausdrücke ab und ist der analytischen Eleganz angemessener. Dies ist auch ohne Zweifel der Grund, warum Lagrange und Monge bei allen Umformungen der Coordinaten, die ihre Schriften enthalten, die Bezeichnungen durch Buchstaben den trigonometrischen Linien vorgezogen haben, welche übrigens Euler schon seit 1748 in diese Rechnungen eingeführt hatte.

Da die gegenseitige Lage der vier Axen, welche sich im Punkt A''' schneiden, durch drei der Winkel bestimmt wird, die je zwei unter einander bilden, so kann man die Data der Aufgabe auf mehr als eine Art wählen. Folgende scheint mir ganz einfach:

Ich setze, *Fig.* 43,

$$B''A'''B' = \varphi,\quad C'A'''C'' = \psi,\quad C'A'''B' = \omega,$$

also

$$C'A'''B'' = \omega - \varphi,\quad C''A'''B' = \omega - \psi.$$

Erwägt man nun, daß kraft des Parallelismus der Geraden $P''R$, QM und $A'''C'$; $P''M$ und $A'''C''$; $P''Q$ und $A'''B'$, die Winkel $A'''RP''$

Um in diesem Fall zugleich den Anfangspunkt der Coordinaten und die Richtung der Axen zu verändern, muß man $x = mt - nu + \alpha$, $y = nt + mu + \beta$ (§. 122) nehmen. Indem man dabei die Bedingungsgleichung

$$m^2 + n^2 = 1$$

---

und P″QM Supplemente von C′A‴B′, die Winkel A‴P″R und C′A‴B″, MP″Q und C″A‴B′, P″MQ und C′A‴C″ einander gleich sind, so hat man nach §. 122

$$m = \frac{A'''R}{A'''P''} = \frac{\sin C'A'''B''}{\sin C'A'''B'} = \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin \omega},$$

$$n = \frac{P''R}{A'''P''} = \frac{\sin B''A'''B'}{\sin C'A'''B'} = \frac{\sin \varphi}{\sin \omega},$$

$$p = \frac{P''Q}{P''M} = \frac{\sin C'A'''C''}{\sin C'A'''B'} = \frac{\sin \psi}{\sin \omega},$$

$$q = \frac{QM}{P''M} = \frac{\sin C''A'''B'}{\sin C'A'''B'} = \frac{\sin(\omega - \psi)}{\sin \omega}.$$

Hieraus folgt, daß

$$A'''P' = x' = \frac{\sin(\omega - \varphi)}{\sin \omega}\, t + \frac{\sin \psi}{\sin \omega}\, u,$$

$$P'M = y' = \frac{\sin \varphi}{\sin \omega}\, t + \frac{\sin(\omega - \psi)}{\sin \omega}\, u$$

ist. Es ist nicht weiter nöthig, irgend eine Bedingungsgleichung zu berücksichtigen, da in der Rechnung nur so viel Größen vorkommen, als zur Bestimmung der Systeme von Coordinaten erforderlich sind. Uebrigens sind diese Bedingungsgleichungen auch mit unter den Bezeichnungen von Sinus und Cosinus begriffen, weil $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$ ist.

Macht man den Winkel C′A‴B′ der ursprünglichen Axen zu einem rechten, so ist $\sin \omega = 1$ und man hat bloß

$$x' = t \cos \varphi + u \sin \psi,$$

$$y' = t \sin \varphi + u \cos \psi.$$

Man sieht, daß der Winkel C″A‴B″ der neuen Axen im Allgemeinen durch $\omega - (\varphi + \psi)$ ausgedrückt ist. Soll er ebenfalls ein rechter sein, so hat man $1^q - \varphi - \psi = 1^q$, also $\psi = -\varphi$ und $\sin \psi = -\sin \varphi$, $\cos \psi = \cos \varphi$ (§. 23), folglich

$$x' = t \cos \varphi - u \sin \varphi.$$

$$y' = t \sin \varphi + u \cos \varphi,$$

wie es unmittelbar aus *Fig.* 44 folgt, wo die Axe A‴C″ auf der anderen Seite der Axe A‴C′ mit Bezug auf die Axe A‴B′ fällt, welcher Umstand durch die Aenderung des Zeichens des Winkels ψ angedeutet ist.

Verf.

berücksichtigt, sieht man, daß man nur drei Größen, nämlich α, β und eine der Größen m und n nach Belieben annehmen darf.

§. 125.

Ich will nun untersuchen, was für Vereinfachungen man vermittelst der Umformung der Coordinaten mit der allgemeinen Gleichung

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F \ldots . (1)$$

vornehmen kann, ohne daß der Coordinatenwinkel aufhört, ein rechter zu bleiben.

Setzt man in diese Gleichung

$$x = mt - nu + \alpha, \quad y = nt + mu + \beta,$$

so wird das Resultat der Substitution ebenfalls eine vollständige Gleichung des zweiten Grades zwischen t und u sein; da man aber drei willkürliche Größe einführt, so kann man eben so viele Bedingungen stellen, wodurch dies Resultat vereinfacht wird, z. B. die Coefficienten von ut, t und u gleich Null setzen, um die damit behafteten Glieder fortzuschaffen. Man wird dann eine Gleichung von der Form

$$A't^2 + C'u^2 = F'$$

erhalten, welche den beiden ersten des 120sten §en ähnlich ist *).

---

*) Die Substitution giebt:

$$\begin{aligned}&(n^2A + mnB + m^2C)\,t^2\\ &+ (2mnA + m^2B - n^2B - 2mnC)\,tu\\ &+ (m^2A - mnB + n^2C)\,u^2\\ &+ (2\beta nA + \alpha nB + \beta mB + 2\alpha mC + nD + mE)\,t\\ &+ (2\beta mA + \alpha mB - \beta nB - 2\alpha nC + mD - nE)\,u\\ &= F - \beta^2A - \alpha\beta B - \alpha^2C - \beta D - \alpha E.\end{aligned}$$

A, B, C, D, E, F sind gegebene Größen, α, β und m willkürliche. Die letzteren kann man so annehmen, daß die Glieder mit tu, t und u verschwinden. Zu diesem Ende würde man

$$\begin{aligned}&2mnA + m^2B - n^2B - 2mnC = 0,\\ &2\beta nA + \alpha nB + \beta mB + 2\alpha mC + nD + mE = 0,\\ &2\beta mA + \alpha mB - \beta nB - 2\alpha nC + mD - nE = 0\end{aligned}$$

Diese Form ist merkwürdig 1) dadurch daß, indem die beiden Werthe von t einander gleich und bloß in den Zeichen verschieden sind, sich ergiebt, daß die Axe der neuen Abscissen u ein Durchmesser ist (§. 111); 2) dadurch daß, da jeder Werth von u, sowohl positiv als negativ genommen, dieselben Werthe für t giebt, der Anfangspunkt der u, in der Mitte des Durchmessers befindlich, der Mittelpunkt der Curve sein muß (§. 114).

Die Rechnung wird einfacher, wenn man, statt vermittelst obiger Ausdrücke für x und y zugleich den Anfangspunkt und die Richtung der Coordinaten zu ändern, zuvörderst die Axen parallel zu einander nimmt. Setzt man zu dem Ende in die Gleichung (1)

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta,$$

so verwandelt sie sich in die folgende:

$$\left.\begin{array}{l} Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 \\ + (2A\beta + B\alpha + D)y' + (2C\alpha + B\beta + E)x' \\ + A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + D\beta + E\alpha = F \end{array}\right\} \ldots (2)$$

Da die Größen α und β willkürlich sind, so können sie dergestalt gewählt werden, daß die Glieder y' und x' verschwinden, indem man die Gleichungen

$$2A\beta + B\alpha + D = 0, \quad 2C\alpha + B\beta + E = 0 \ldots (a)$$

ansetzt, woraus man erhält

$$\alpha = \frac{BD - 2AE}{4AC - B^2}, \quad \beta = \frac{BE - 2CD}{4AC - B^2}.$$

Hiernach bleiben in der Gleichung (2) nur noch die mit y'^2, $x'y'$ und x'^2 behafteten und die von den Coordinaten x' und y'

---

setzen, für n seinen Werth $\sqrt{1 - m^2}$ substituiren und aus den drei Bedingungsgleichungen die Werthe für α, β und m entwickeln müssen. Substituirte man dann diese Werthe in die obige Gleichung, so würden die gedachten Glieder verschwinden, und man erhielte eine Gleichung von der Form

$$A't^2 + C'u^2 = F'.$$

Die Bestimmung von α, β und m ist mühsam. Durch das im Text angegebene Verfahren wird sie erleichtert. Uebers.

unabhängigen Glieder übrig. Die letzteren lassen sich vermittelst der Gleichungen (a) reduciren; denn multiplicirt man die erste mit β, die zweite mit α, und zieht ihre Summe von der Gleichung (2) ab, so erhält man mit Weglassung der Glieder, welche verschwinden müssen,

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 - A\beta^2 - B\alpha\beta - C\alpha^2 = F \ldots (3).$$

Ich gebe nun den Axen der Coordinaten eine neue Richtung, doch so, daß der Coordinatenwinkel ein rechter bleibt, indem ich nach dem vorigen §en

$$x' = mt - nu,$$
$$y' = nt + mu$$

setze. Durch die Substitution dieser Werthe geht die Gleichung (3) in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} &(An^2 + Bmn + Cm^2)\,t^2 \\ &+ [2(A - C)mn + B(m^2 - n^2)]\,tu \\ &+ (Am^2 - Bmn + Cn^2)\,u^2 \\ &- A\beta^2 - B\alpha\beta - C\alpha^2 = F \end{aligned}\right\} \ldots (4).$$

Da die beiden Größen m und n der Gleichung $m^2 + n^2 = 1$ genügen müssen, also nur die eine willkürlich angenommen werden darf, so werde ich sie so bestimmen, daß das Produkt ut verschwindet, und zu dem Ende die Gleichung

$$2(A - C)mn + B(m^2 - n^2) = 0 \ldots (m)$$

ansetzen. Mache ich nun, um abzukürzen,

$$An^2 + Bmn + Cm^2 = A',$$
$$Am^2 - Bmn + Cn^2 = C',$$
$$A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + F = F',$$

so nimmt die Gleichung (4) folgende Gestalt an:

$$A't^2 + C'u^2 = F',$$

mithin die verlangte, wobei jedoch vorausgesetzt wird, daß man reelle Werthe für die Größen m und n finden könne, welche durch Gleichungen des zweiten Grades gegeben sind *).

*) Man sieht also, daß die allgemeine Form der Gleichungen vom zweiten Grade

§. 126.

Diese Werthe werden durch die Combination der Gleichungen

$$2(A - C)mn + B(m^2 - n^2) = 0,$$
$$m^2 + n^2 = 1$$

gefunden. Die erste giebt

$$mn = \frac{B(m^2 - n^2)}{2(C - A)};$$

setzt man nun $\frac{B}{2(C - A)} = \gamma$, erhebt den Werth von mn zum Quadrat und eliminirt n^2 vermittelst der Gleichung $m^2 + n^2 = 1$, so wird kommen

$$m^4 - m^2 = - \frac{\gamma^2}{1 + 4\gamma^2},$$

woraus man zieht

$$m^2 = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - \frac{\gamma^2}{1 + 4\gamma^2}} = \tfrac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{1 + 4\gamma^2}},$$

und hiernächst

$$n^2 = \tfrac{1}{2} \mp \frac{1}{2\sqrt{1 + 4\gamma^2}}.$$

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F$$

durch Veränderung des Anfangspunkts und der Richtung der auf einander rechtwinklig bleibenden Coordinaten auf die Form

$$A't^2 + C'u^2 = F'$$

gebracht werden kann, deren Abhängigkeit von der ursprünglichen Form durch die Gleichungen

$$A' = An^2 + Bmn + Cm^2,$$
$$C' = Am^2 - Bmn + Cn^2,$$
$$F' = A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + F,$$

und durch die Bedingungsgleichungen

$$2A\beta + B\alpha + D = 0,$$
$$2C\alpha + B\beta + E = 0,$$
$$m^2 + n^2 = 1$$
$$2(A - C)mn + B(m^2 - n^2) = 0$$

bestimmt wird. Uebers.

Setzt man nun statt γ die damit bezeichnete Größe zurück und substituirt die Werthe von m^2 und n^2 in dem Ausdruck für mn, so findet man, wenn man bloß die oberen Zeichen der Wurzelgrößen berücksichtigt,

$$m^2 = \tfrac{1}{2} + \frac{C - A}{2\sqrt{(C - A)^2 + B^2}},$$

$$n^2 = \tfrac{1}{2} - \frac{C - A}{2\sqrt{(C - A)^2 + B^2}},$$

$$mn = \frac{B}{2\sqrt{(C - A)^2 + B^2}}.$$

Die Werthe von m und n, die man aus denen von m^2 und n^2 zieht, werden das doppelte Zeichen $\pm$ erhalten; man ersieht aber aus dem Ausdruck für mn, daß diese Zeichen so gewählt werden müssen, daß das Produkt mn mit B von gleichem Zeichen sei*).

Substituirt man die Werthe von m^2, n^2 und mn in die Ausdrücke für A′ und C′, und bringt die Glieder mit gleichem Nenner zusammen, so wird man bei einiger Aufmerksamkeit sehen, daß ihr Zähler durch $\sqrt{(C - A)^2 + B^2}$ theilbar sein wird, und daß man erhält

$$A' = \tfrac{1}{2}(C + A) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(C - A)^2 + B^2},$$

$$C' = \tfrac{1}{2}(C + A) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(C - A)^2 + B^2}.$$

*) Wenn man, wie in der Anmerkung zu §. 124, $B''A'''B' = \varphi$ setzt, so erhält man

$$m = \cos\varphi, \quad n = \sin\varphi,$$

und hieraus

$$mn = \sin\varphi \cos\varphi = \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi,$$

$$m^2 - n^2 = \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2 = \cos 2\varphi \text{ (§. 11)},$$

mithin

$$\frac{\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \tfrac{1}{2} tg\, 2\varphi = \frac{mn}{m^2 - n^2} = \frac{B}{2(C - A)},$$

oder

$$tg\, 2\varphi = \frac{B}{C - A},$$

welche Formel sogleich den Winkel giebt, den die Axe der t mit der der x bildet. Verf.

Die Untersuchung dieser Ausdrücke giebt folgende Resultate:

1) Die Größen A′ und C′ sind immer reell.

2) wenn A und C beide positiv oder beide negativ sind (den letzten Fall kann man immer auf den ersten zurückführen, wenn man in der Gleichung (1) §. 125 alle Zeichen umkehrt), so wird A′ immer positiv und C′ es nur dann sein, wenn

$$C + A > \sqrt{(C - A)^2 + B^2},$$

oder $(C + A)^2 > (C - A)^2 + B^2$,

oder $2AC > - 2AC + B^2$,

oder $4AC > B^2$,

oder endlich $4AC - B^2$ positiv ist.

3) wenn A und C verschiedene Zeichen haben, oder wenn A positiv oder doch positiv gemacht und C negativ ist, so erhält man

$$A' = \tfrac{1}{2}(A - C) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(C + A)^2 + B^2}$$

$$C' = \tfrac{1}{2}(A - C) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(C + A)^2 + B^2};$$

dann ist A′ positiv und C′ negativ, und da zugleich 4AC negativ ist, so wird $4AC - B^2$ negativ, woraus folgt, daß das Zeichen vor C′ immer von dem Zeichen der Größe $4AC - B^2$ abhängt.

4) Ist endlich $4AC = B^2$, so ist $C' = 0$, ein merkwürdiger Umstand, nicht bloß, weil die umgeformte Gleichung $A't^2 + C'u^2 = F'$ sich dann auf $A't^2 = F'$ reducirt, sondern auch, weil die Ausdrücke für α und β (§. 125) dann unendlich werden; man kann also in diesem Fall nicht zugleich die mit y′ und x′ behafteten Glieder aus der Gleichung (2) verschwinden lassen.

§. 127.

Um dieser Schwierigkeit auszuweichen, will ich in die Gleichung (1) unmittelbar $x = mt - nu$ und $y = nt + mu$ setzen, was geben wird

$$\left.\begin{array}{l}(An^2 + Bmn + Cm^2)t^2 \\ + [2(A - C)mn + B(m^2 - n^2)]\,ut \\ + (Am^2 - Bmn + Cn^2)\,u^2 \\ + (Dn + Em)\,t + (Dm - En)\,u = F\end{array}\right\}(5).$$

Ich mache nun wieder

$$2(A - C)mn + B(m^2 - n^2) = 0 \;.\;.\;.\;.\; (m),$$

um das Produkt ut wegzuschaffen. Die Werthe von m und n, so wie die der Coefficienten von t^2 und u^2 werden dieselben sein, wie im vorigen §en, und die umgeformte Gleichung ist

$$A't^2 + C'u^2 + (Dn + Em)t + (Dm - En)u = F \;(6).$$

Um die Vereinfachung zu vollenden, ist noch der Anfangspunkt der Coordinaten zu ändern. Setzt man demnach

$$t = t' + \alpha', \quad u = u' + \beta',$$

so entsteht

$$\begin{array}{l}A't'^2 + C'u'^2 + (2A'\alpha' + Dn + Em)t' \\ \qquad + (2C'\beta' + Dm - En)u' \\ + A'\alpha'^2 + C'\beta'^2 + (Dn + Em)\alpha' + (Dm - En)\beta' = F.\end{array}$$

Es ist klar, daß unter dieser Form das mit u' behaftete Glied nicht verschwinden kann, wenn $C' = 0$ ist; denn die Gleichung

$$2C'\beta' + Dm - En = 0,$$

die man in diesem Fall ansetzen müßte, würde für β' einen unendlichen Werth geben. Ich will also die willkürlichen Größen α' und β' so nehmen, daß das mit t' behaftete Glied und diejenigen, welche von den Coordinaten u' und t' unabhängig sind, wegfallen, wodurch ich auf die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c}2A'\alpha' + Dn + Em = 0, \\ A'\alpha'^2 + C'\beta'^2 + (Dn + Em)\alpha' + (Dm - En)\beta' - F = 0\end{array}\right\}\ldots(a')$$

geführt werde. Mache ich dann, um abzukürzen,

$$2C'\beta' + Dm - En = -E',$$

so erhalte ich die Gleichung

$$A't'^2 + C'u'^2 - E'u' = 0 \text{ *)}.$$

---

*) *Fig.* 76 wird das hier Gesagte dem Anfänger anschaulich machen. Es seien AB und AC die Axen, auf welche sich die rechtwinkligen Coordinaten x und y in der ursprünglichen Gleichung

Um alle Fälle, welche diese Umformung in sich begreift, zu erkennen, müßte man untersuchen, wann α' und β' durch die beiden ersten unter den vorstehenden Gleichungen bestimmt werden können; es ist aber für den gegenwärtigen Zweck hinreichend, den einzigen Fall zu betrachten, wo $C' = 0$ ist *), wodurch die zweite der Gleichungen (a′) auf

$$A'\alpha'^2 + (Dn + Em)\alpha' + (Dm - En)\beta' - F = 0,$$

und die in t' und u' umgeformte auf

$$A't'^2 = E'u'$$

gebracht wird.

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F$$

beziehen, und $AP = x$, $MP = y$. Setzt man $x = mt - nu$ und $y = nt + mu$ und macht

$$2(A - C)mn + B(m^2 - n^2) = 0,$$

so erhält man

$$A't^2 + C'u^2 + (Dn + Em)t + (Dm - En)u = F,$$

eine Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten $AP' = t$ und $MP' = u$, in der A' und C' ihre im vorigen §en entwickelten Werthe behalten. Setzt man ferner $t = t' + \alpha'$ und $u = u' + \beta'$, so entsteht

$$A't'^2 + C'u'^2 + (2A'\alpha' + Dn + Em)t' + (2C'\beta' + Dm - En)u' + A'\alpha'^2 + C'\beta'^2 + (Dn + Em)\alpha' + (Dm - En)\beta' = F,$$

eine Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten $A''P'' = t'$ und $MP'' = u'$, deren Axen $A''B''$ und $A''C''$, von gleicher Lage mit den vorigen AB' und AC', sich in dem Punkt A'' schneiden, der durch $AA' = \alpha'$ und $A''A' = \beta'$ bestimmt ist. Diese Gleichung endlich erhält die Form

$$A't'^2 + C'u'^2 - E'u' = 0,$$

wenn

$$2A'\alpha' + Dn + Em = 0,$$
$$2C'\beta' + Dm - En = -E'$$

und $A'\alpha'^2 + C'\beta'^2 + (Dn + Em)\alpha' + (Dm - En)\beta' - F = 0$ gesetzt wird.

Uebers.

*) Indem alle übrigen Fälle in der Gleichnng

$$A't^2 + C'u^2 = F'$$

begriffen sind, welche sich leicht auf die Form

$$A't'^2 + C'u'^2 - E'u' = 0$$

bringen läßt, wenn man $u = u' \pm \sqrt{\frac{F'}{C'}}$ und $\mp 2\sqrt{C'F'} = E'$ setzt. Man könnte auch mit der letzten Umformung beginnen, indem man von §. 124 auf §. 127 überginge.

Verf.

Man vereinfacht noch die Gleichungen (a') wenn man von der ersten, nachdem man sie mit α' multiplicirt hat, die zweite abzieht, und berücksichtigt, daß

$$-E' = Dm - En$$

wird, wenn $C' = 0$ ist. Man erhält dann

$$\left.\begin{aligned} 2A'\alpha' + Dn + Em &= 0 \\ A'\alpha'^2 + E'\beta' + F &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (a'').$$

Die Voraussetzung endlich, daß $C' = 0$ ist, welche dem Fall $4AC = B^2$ entspricht, verwandelt die Resultate des vorigen §en in

$$A' = C + A,$$

$$m^2 = \frac{C}{C + A'},\quad n^2 = \frac{A}{C + A'},\quad mn = \frac{\sqrt{AC}}{C + A}.$$

Wenn $Dm - En = 0$ ist, so ist auch $E' = 0$, und da dann die Gleichungen (a'') nur noch die unbekannte α' enthalten, so können sie ganz verschiedene Resultate geben; allein unter dieser Voraussetzung, verbunden mit der, daß $C' = 0$ ist, nimmt die Gleichung (6) S. 206 die Form

$$A't^2 + D't = F$$

an, welche bloß noch die Coordinate t enthält.

§. 128.

Sämmtliche Fälle der allgemeinen Gleichung

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F$$

sind also in den drei umgeformten

$$A't^2 + C'u^2 = F',$$

$$A't'^2 = E'u',$$

$$A't^2 + D't = F$$

enthalten, von denen die beiden letzteren bloß dem Fall angehören, wo $4AC = B^2$ ist, die erste aber allen übrigen.

Die drei in §. 120 aufgestellten Formen finden sich in den beiden ersten der obigen Gleichungen wieder, mit dem einzigen Unterschiede, daß die Coordinaten jetzt auf einander senkrecht sind, aus welchem Grunde man die Durchmesser, auf die sich

nun

nun die durch diese Gleichungen dargestellten Curven beziehen, Axen nennt. Ich will hier die vornehmsten Umstände dieser Gleichungen wieder in Erinnerung bringen.

1) Wenn die Größen A' und C' beide positiv sind, was dann der Fall ist, wenn $4AC - B^2$ in der allgemeinen Gleichung positiv ist, so gehört die ungeformte

$$A't^2 + C'u^2 = F',$$

welche

$$t = \pm \sqrt{\frac{F' - C'u^2}{A'}}$$

giebt, einer Ellipse an (§. 120).

Man findet die beiden Halbaxen OI und OL, *Fig.* 45, wenn man den Werth von u für $t = 0$ und den von t für $u = 0$ sucht. Hiernach erhält man

$$OI = \sqrt{\frac{F'}{C'}}, \quad OL = \sqrt{\frac{F'}{A'}},$$

und bezeichnet man diese beiden Linien mit a und b, so hat man

$$\frac{F'}{C'} = a^2 \quad \text{also } C' = \frac{F'}{a^2},$$

$$\text{und} \quad \frac{F'}{A'} = b^2 \; \ldots . \; A' = \frac{F'}{b^2},$$

mithin

$$\frac{t^2}{b^2} + \frac{u^2}{a^2} = 1 \quad \text{und hieraus} \quad t = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - u^2},$$

ein Resultat, welches dem in §. 115 gefundenen ähnlich ist und eben so construirt wird.

Der gegenwärtige Fall begreift auch die Gleichung des Kreises unter sich, die man erhält, wenn $C' = A'$ ist, weil die umgeformte dann

$$A'(t^2 + u^2) = F' \quad \text{oder} \quad t^2 + u^2 = \frac{F'}{A'}$$

wird und die Coordinaten sich rechtwinklich durchschneiden. Der Halbmesser ist $\sqrt{\frac{F'}{A'}}$.

Die Gleichung $A't^2 + C'u^2 = F'$ wird ungereimt, wenn F' negativ ist, während A' und C' positiv bleiben. Sie stellt sich indessen als richtig dar, wenn $F' = 0$ ist, und $t = 0$ und $u = 0$ gesetzt wird, wo sie dann bloß den Anfangspunkt der Coordinaten giebt. Dies ist die auf ihren Mittelpunkt reducirte Ellipse (§. 116). Setzt man in den Ausdruck für F' (203) die Werthe von α und β, so wird man durch die Coefficienten der Gleichung (1) leicht die Bedingung ausdrücken, welcher die Größe F' genügen muß, um irgend eine Bedeutung zu erhalten.

2) Wenn A' und C' verschiedene Zeichen haben, was dann statt findet, wenn $4AC - B^2$ negativ ist, so nimmt die Gleichung zwischen t und u nothwendig eine von diesen Formen an:

$$A't^2 - C'u^2 = F',$$
$$A't^2 - C'u^2 = - F',$$

und setzt man wie vorhin für A' und C' ihre durch a und b ausgedrückten Werthe, so erhält man nach den Reductionen

$$\frac{t^2}{b^2} - \frac{u^2}{a^2} = 1 \quad \text{und hieraus} \quad t = \pm \frac{b}{a}\sqrt{u^2 + a^2},$$
$$\frac{t^2}{b^2} - \frac{u^2}{a^2} = -1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; t = \pm \frac{b}{a}\sqrt{u^2 - a^2}.$$

Diese beiden Gleichungen gehören Hyperbeln an (§.120), von denen die erste die Axe der t, nicht die der u durchschneidet, weil t darin nicht Null werden kann; für die zweite gilt das Gegentheil.

Obgleich der Werth $t = \sqrt{-b^2}$, den man in der zweiten Gleichung für $u = 0$ erhält, imaginär ist, so hindert dies doch nicht, daß man im Mittelpunkt O, *Fig.* 47, eine Senkrechte $OL = \sqrt{b^2} = b$ errichtet und nach der Analogie der Ellipse die Linie LL', das Doppelte von OL, die zweite Axe nennt; allein man unterscheidet durch den Namen der Haupt- oder Zwerchaxe die Linie II', welche der Curve begegnet, was von LL' nicht gilt *).

---

*) Wird in der ersten Gleichung $u = 0$ gesetzt, so erhält man $t = b = OL$, und wird in der zweiten $t = 0$ genommen, so ist

Ist $C' = A'$, so werden beide Axen einander gleich, und die Hyperbel wird gleichseitig genannt.

Man sieht, daß wenn $F' = 0$ ist, die Gleichungen der Hyperbel sich auf

$$A't^2 - C'u^2 = 0 \quad \text{oder} \quad t = \pm u\sqrt{\frac{C'}{A'}}$$

reduciren und dann nur noch zwei gerade Linien darstellen (§. 118).

3) Hat man $4AC = B^2$, so gehört die umgeformte

$$A't'^2 = E'u' \quad \text{oder} \quad t' = \pm\sqrt{\frac{E'}{A'}}u'$$

einer Parabel an, welche ihrer Axe IB, *Fig.* 48, im Anfangspunkt der Coordinaten t' und u' begegnet.

Wenn $E' = 0$ ist, und die Gleichungen (a') S. 208 übereinstimmen, so erhält man $A't'^2 = 0$, ein Resultat, welches, da es zweimal $t' = 0$ giebt, die Axe IB darstellt, mit der sich die Zweige der Parabel zu vereinigen streben, wenn E' abnimmt *).

Die letzte umgeformte, nämlich

$$A't^2 + D't = F,$$

welche für t zwei bestimmte Werthe giebt, deutet zwei der Axe der u parallel laufende gerade Linien an.

$u = a = OI$. Werden also die Abscissen auf der Axe $II' = 2a$ gerechnet, so giebt die erste Gleichung die Curve, welche durch L und L' und die zweite die, welche durch I und I' geht. Mit Hinsicht auf die letztere Curve heißt II' die Zwerchaxe und LL' die zweite oder auch die zugeordnete; mit Hinsicht auf die erste vertauschen beide Axen ihre Benennungen. Die Zwerchaxe kann größer, kleiner oder eben so groß als die zugeordnete sein. Bei der Ellipse bezeichnet man allemal die größere Axe mit dem Namen der ersten oder großen, die kleinere mit dem Namen der zweiten oder kleinen. Uebers.

*) Die Gleichung $t' = \pm\sqrt{\frac{E'}{A'}}u'$ zeigt, daß für irgend eine Abscisse u' die zugehörigen Ordinaten um so kleiner sind, je kleiner E' wird, und daß mit dem schwindenden E' die Ordinaten aller Abscissen Null werden, mithin die Parabel sich in eine gerade Linie verwandelt. Uebers.

Endlich ist noch zu bemerken, daß die Gleichung

$$A't'^2 + C'u'^2 - E'u' = 0 \quad (\S.\ 127)$$

der Ellipse, Hyperbel und Parabel gemeinschaftlich angehört. Die erste erhält man, wenn A' und C' gleiche Zeichen haben, die zweite, wenn A' und C' von verschiedenen Zeichen sind, die dritte, wenn C' = 0 ist *).

Der Punkt der Curve, in welchem sich der Anfang der Coordinaten befindet, wenn man denselben in einem der Enden der Axe annimmt, wird der Scheitel genannt. In der Ellipse und Hyperbel giebt es zwei Scheitel, welche in *Fig.* 45 und 47 durch I und I' angedeutet sind; die Parabel hingegen, *Fig.* 48, hat nur einen Scheitel, mithin keinen Mittelpunkt, weshalb auch ihre Gleichung nicht die Form

$$A't^2 + C'u^2 = F'$$

annehmen kann.

§. 129.

Wenn man vermittelst der in den vorhergehenden §§en entwickelten Formeln erkannt hat, auf welche Art von Linien sich jeder beliebige Fall der allgemeinen Gleichung bezieht, so muß man, um diese Linie zeichnen zu können, die Coordinatenaxen der umgeformten Gleichung in ihrem richtigen Verhältniß zu den ursprünglichen Axen darstellen und die Größen A', C', F' oder E' construiren. Hiebei kann der Leser keine Schwierigkeit finden, so bald er nur einige Uebung erlangt hat, allgemeine

---

*) Haben A' und C' einerlei Zeichen, so ist

$$t' = \pm \sqrt{\frac{E'u' - C'u'^2}{A'}},$$

und haben A' und C' verschiedene Zeichen, so ist

$$t = \pm \sqrt{\frac{E'u' + C'u'^2}{A'}}.$$

Construirt man diese Gleichungen, so überzeugt man sich leicht, daß die erste die Ellipse, die zweite die Hyperbel giebt, für Abscissen vom Scheitel gerechnet. Uebers.

Formeln auf einen besonderen Fall anzuwenden. Ich halte es daher auch nicht für nöthig, zum Behuf von Operationen, die nicht häufig vorkommen, viele Regeln zu geben, die ohnedies dem Gedächtniß entschwunden zu sein pflegen, wenn man einmal Gebrauch davon machen will. Das folgende Beispiel, so einfach es auch ist, wird hinlänglich sein, die Zwecklosigkeit einer ausführlicheren Anweisung darzuthun.

Man habe die Gleichung

$$xy + Dy + Ex = F.$$

Hält man sie gegen die Gleichung (1), so sieht man, daß

$$A = 0,\quad B = 1,\quad C = 0,$$
$$4AC = 0,\quad B^2 = 1$$

ist, und da hier $4AC$ nicht gleich B^2 ist, so gehört dieser Fall für die umgeformte

$$A't^2 + C'u^2 = F'.$$

Man findet nun, daß (S. 202 und 203)

$$\alpha = -D,\quad \beta = -E,\quad F' = F + DE.$$

Ferner ist (S. 205)

$$A' = \tfrac{1}{2},\quad C' = -\tfrac{1}{2}$$

und man hat mithin

$$\tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{2}u^2 = F + DE \quad \text{oder} \quad t^2 - u^2 = 2(F + DE).$$

Die gesuchte Curve ist mithin eine Hyperbel, welche von der Axe der t geschnitten wird und deren beide Halbaxen den Werth $\sqrt{2(F + DE)}$ haben (§. 128). Geht man auf die Umwandlungen zurück, die vermittelst der Werthe

$$x = x' + \alpha,\quad y = y' + \beta,$$
$$x' = mt - nu,\quad y' = nt + mu$$

bewerkstelligt werden, so sieht man zuvörderst, daß sich der Anfang der t und u in dem Punkt befindet, für den $x = \alpha$ und $y = \beta$ ist. Macht man also, *Fig.* 77, $AA' = -D$, $AA'' = -E$, so wird A''' dieser Anfangspunkt sein. Berechnet man dann den Werth von m oder vom Cosinus des Winkels, den die Axe der t mit der der x bildet, so findet man die

Zahl $\frac{1}{\sqrt{2}}$, und dieser Werth entspricht dem Cosinus von $0^q,5$. Macht man also den Winkel $B''A'''A'' = 0^q,5$ und errichtet $A'''C''$ senkrecht auf $A'''B''$, so hat man die Axen der t und u. Nimmt man endlich $A'''I = A'''I' = \sqrt{2(F + DE)}$, so ergeben sich die Scheitel I und I' der Hyperbel, welche der Ort der vorgelegten Gleichung ist.

Ein ähnlicher Gang wird in jedem anderen Fall zum Ziel führen. Ich habe übrigens dieses schon im §. 120 behandelte Beispiel gewählt, um zu zeigen, daß die Curve, die dort durch ihre Asymptoten angedeutet wurde, wirklich eine Hyperbel ist, und zugleich, um die Axen derselben zu finden *).

Oefters untersucht man, welches die Curve ist, der eine gewisse Eigenschaft zukommt, von welcher man noch nicht weiß, ob sie einer schon bekannten Curve angehört; in solchem Fall läßt sich die Gleichung, die diese Eigenschaft ausdrückt, auf eine der schon untersuchten Gleichungen zurückführen. Dies werden die folgenden Aufgaben zeigen.

§. 130.

Die Gleichung einer Curve von der Eigenschaft zu finden, daß die Summe der Entfernungen MF und MF' eines jeden ihrer Punkte M, *Fig.* 45, von zwei festen Punkten F und F' einer gegebenen Linie gleich sei.

---

*) Man könnte die Gleichung der Hyperbeln zwischen ihren Asymptoten unmittelbar aus der allgemeinen Gleichung für sämmtliche Linien des zweiten Grades herleiten, indem man die rechtwinkligen Coordinaten in Bezug auf ein anderes Coordinatensystem mit unbestimmtem Winkel umformte. Man würde alsdann vier willkürliche Größen (§. 123) einführen müssen, deren man sich so zu bedienen hätte, daß die mit t^2, u^2, t und u behafteten Glieder verschwänden, wodurch die allgemeine Gleichung des zweiten Grades auf die Form $B'ut = F'$ gebracht würde. Allein man würde finden, daß die Größen m und n nur in dem Falle reelle Werthe erhielten, wo $4AC - B^2$ das Zeichen — hat, d. h. also nur für die Hyperbel. Verf.

Bezeichnet man die gegebene Linie mit 2a, den Abstand FF′ der festen Punkte durch 2c, nimmt ferner den in der Mitte von FF′ befindlichen Punkt O für den Anfangspunkt der Coordinaten, so daß OF = OF′ = c ist, und setzt OP = x, PM = y, so wird man finden

$$FP = c - x, \quad F'P = c + x.$$

Da die bei P rechtwinkligen Dreiecke PMF, PMF′ geben

$$MF = \sqrt{\overline{FP}^2 + \overline{PM}^2}, \quad MF' = \sqrt{\overline{F'P}^2 + \overline{PM}^2},$$

so wird man finden

$$MF = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}, \quad MF' = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}.$$

Setzt man aber MF = z, so erhält man MF′ = 2a — z, weil man nach der Voraussetzung überall in der Curve

$$MF + MF' = 2a$$

hat; man wird demnach erhalten

$$z = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}, \; 2a - z = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}.$$

Erhebt man diese Größen zum Quadrat, um die Wurzelgröße wegzuschaffen, so entsteht

$$z^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2,$$

$$4a^2 - 4az + z^2 = c^2 + 2cx + x^2 + y^2,$$

und zieht man die zweite dieser Gleichungen von der ersten ab, so bleibt

$$-4a^2 + 4az = -4cx,$$

woraus folgt

$$z = \frac{a^2 - cx}{a}.$$

Substituirt man endlich diesen Werth in dem ersten Ausdruck für z^2, so gelangt man zur gesuchten Gleichung, welche nach den erforderlichen Reductionen die Gestalt

$$a^4 + c^2x^2 = a^2c^2 + a^2(x^2 + y^2)$$

annehmen wird.

Diese Gleichung zeigt uns, da sie vom zweiten Grade ist, daß die gesuchte Curve nur zu einer von denen gehören kann, welche im Vorhergehenden untersucht sind; und um zu finden,

zu welcher Art sie gehört, gebe man ihrer Gleichung die Form

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^4 - a^2c^2.$$

Vergleicht man sie nun mit $A't^2 + C'u^2 = F'$, so erhält man, nachdem man in der letzteren y und x statt t und u gesetzt hat,

$A' = a^2$, $C' = a^2 - c^2$, $F' = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)$, woraus man schließen wird, daß sie die Gleichung einer Ellipse ist, weil c kleiner als a, mithin die Größen A', C' und F' wesentlich positiv sind (§. 128). Setzt man zur Abkürzung $a^2 - c^2 = b^2$, so entsteht

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

woraus man zieht

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Die halben Axen OI und OL dieser Ellipse sind a und b, und da $b^2 = a^2 - c^2$, so zieht man hieraus

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

woraus man ersieht, daß, wenn man nur die Axen II' und LL' einer Ellipse kennt, auf der großen Axe die Punkte F und F', für welche man MF + MF' = II' hat, gefunden werden können, wenn man aus dem Punkt L, als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser, welcher der Hälfte der großen Axe II' gleich ist, einen Kreisbogen beschreibt; denn in den Durchschnittspunkten F und F' dieses Bogens mit der Axe II' hat man

$$OF = OF' = \sqrt{\overline{FL}^2 - \overline{OL}^2} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Die hier aufgelöste Aufgabe giebt also eine allen Ellipsen gemeinschaftliche Eigenschaft zu erkennen, nämlich die, daß die Summe der Linien MF und MF', die man **Leitstrahlen** (*radii vectores*) nennt, zu den in der großen Axe befindlichen Punkten F und F', den sogenannten **Brennpunkten**, gezogen, immer der großen Axe gleich ist.

§. 131.

Diese Eigenschaft bietet ein sehr einfaches Mittel dar, so viele Punkte der Ellipse, als man will, zu finden, oder sie selbst durch eine stetige Bewegung zu beschreiben. Denn wenn man eine beliebige Zirkeleröffnung FM nimmt, welche größer als FI und kleiner als F′I ist, mit dieser Oeffnung aus F als Mittelpunkt einen Kreisbogen beschreibt, und hierauf aus F′, als neuem Mittelpunkt, mit einem Halbmesser F′M, welcher dem Unterschiede zwischen der Axe II′ und dem ersten Halbmesser FM gleich ist, einen zweiten Kreisbogen zieht, so wird derselbe den ersten in zwei Punkten M und M′ schneiden, welche zur Ellipse gehören. Wiederholt man dies Verfahren mit immer anderen Oeffnungen des Zirkels, so wird man immer andere Punkte der gesuchten Ellipse erhalten, und wenn mehrere solcher Punkte gefunden sind, so kann man sie durch einen freien Zug mit einander verbinden, der die Curve desto richtiger darstellen wird, je größer die Anzahl dieser Punkte ist.

Wenn die Ellipse sehr groß werden soll, so beschreibt man sie durch eine stetige Bewegung, indem man in den Punkten F und F′ die Enden eines Fadens befestigt, dessen Länge der Axe II′ gleich ist; diesen Faden spannt man vermittelst eines Stiftes M aus, welchen man längs desselben umhergleiten läßt, bis er wieder zu dem Punkt gelangt, von welchem er ausgegangen ist; er wird alsdann die verlangte Ellipse beschrieben haben.

Der Abstand c eines Brennpunkts vom Mittelpunkt wird die **Excentricität** der Ellipse genannt.

Die Gleichung $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ bietet ebenfalls eine Construction durch Punkte dar, welche in der Ausübung sehr bequem ist. Nachdem man nämlich aus dem Mittelpunkt O der gesuchten Ellipse, *Fig.* 46, zwei Halbkreise, den einen über der großen, den andern über der kleinen Axe als Durchmessern beschrieben, und eine große Anzahl Halbmesser ON, ON′ . . . gezogen hat, lasse man auf die Axe II′ die Senkrechten PN,

P′N′ . . . herab, und lege durch die Punkte R, R′ . . ., in denen die Halbmesser ON, ON′ . . . den kleineren der beiden Kreise schneiden, die Geraden RM, R′M′ . . . parallel zu II′; die Punkte M, M′ . . ., welche diese Parallelen auf den Senkrechten PN, P′N′ . . . bestimmen, werden zur gesuchten Ellipse gehören. Durch diese Operation erhält man nur die eine Hälfte der Ellipse; wenn man aber dieselbe unter der Axe II′ wiederholt, so wird man sie ganz haben.

Um die Richtigkeit dieser Construction einzusehen, erwäge man, daß man vermöge des Parallelismus der Geraden RM und II′ haben muß

$$ON : OR = PN : PM,$$

und da

$$ON = a, \quad OR = b, \quad OP = x,$$

so folgt

$$PN = \sqrt{\overline{ON}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{a^2 - x^2},$$

und

$$a : b = \sqrt{a^2 - x^2} : PM,$$

mithin ist

$$PM = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = y\ ^{*}).$$

---

*) Man erhält also aus den Ordinaten des Kreises, der über der großen Axe beschrieben ist, die Ordinaten der Ellipse, wenn man jene nach dem Verhältniß a : b verkürzt. Uebers. — Diese Construktion giebt den Werthen von x und y eine bemerkenswerthe Gestalt. Bezeichnet man den Winkel NOP mit φ, so erhält man $OP = a \cos \varphi$ und da PM dem Perpendikel gleich ist, welchen man von R auf OP fällen kann, so erhellt daraus, daß $PM = b \sin \varphi$ ist. Man hat also

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung für die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, so werden sie deren Richtigkeit, unabhängig von dem Winkel φ, nachweisen. Dies ist der einfachste Fall einer Umformung, durch welche Ivory die Auflösung eines auf die Attraktion der Sphäroïden bezüglichen Problems in hohem Grade vereinfacht hat. Verf.

§. 132.

Ich will nun die in §. 130 aufgelöste Aufgabe modificiren und setzen, man habe, *Fig.* 47, $MF' - MF = II' = 2a$ statt $MF' + MF = 2a$, d. h. es sei der Unterschied der Leitstrahlen von einer constanten Größe. Werden die in dem gedachten §en gebrauchten Bezeichnungen beibehalten, so wird man haben

$$MF = \sqrt{\overline{FP}^2 + \overline{PM}^2} = z = \sqrt{(c - x)^2 + y^2},$$

$$MF' = \sqrt{\overline{F'P}^2 + \overline{PM}^2} = 2a + z = \sqrt{(c + x)^2 + y^2},$$

woraus man erhält

$$z^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2,$$

$$4a^2 + 4az + z^2 = c^2 + 2cx + x^2 + y^2.$$

Zieht man die erste dieser Gleichungen von der zweiten ab, so erhält man

$$4a^2 + 4az = 4cx \quad \text{oder} \quad z = \frac{cx - a^2}{a}$$

und wird durch diesen Werth von z zur Gleichung

$$\left(\frac{cx - a^2}{a}\right)^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2$$

gelangen, welche sich nach der Entwickelung auf

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

reducirt. Im gegenwärtigen Fall, wo $c > a$ ist, muß man $b^2 = c^2 - a^2$ nehmen, welches geben wird

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

eine Gleichung, die der Hyperbel angehört. Diese Curve hat mithin die Eigenschaft, daß der Unterschied ihrer Leitstrahlen MF und MF' der Zwerchaxe II' gleich ist, auf welcher sich die Brennpunkte F und F' befinden.

Ich habe schon oben (§. 128) bemerkt, daß die Hyperbel eigentlich nur eine Axe hat, daß man aber, um die Analogie mit der Ellipse beizubehalten, eine zweite durch den Punkt O auf die erste senkrecht gezogene Axe LL' annimmt. Die Länge OL der Hälfte dieser Axe drückt b aus, und die Gleichung

$b^2 = c^2 - a^2$, welche $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ giebt, zeigt, daß man, um die Punkte F und F′ zu finden, die Abstände OF und OF′ gleich der Hypotenuse des mit den beiden halben Axen OI und OL construirten rechtwinkligen Dreiecks nehmen muß *).

§. 133.

Die Eigenschaft der Brennpunkte F und F′ kann zur Construction der Hyperbel durch Punkte dienen. Zu dem Ende beschreibt man aus F, als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser FM, welcher zwar nach Belieben, aber doch nicht kleiner als FI genommen werden darf, einen Kreisbogen, und einen zweiten aus F′ mit einem Halbmesser F′M, der um II′ entweder größer oder kleiner als der vorige ist; beide Bogen werden sich in zwei zur Hyperbel gehörigen Punkten M und M′ schneiden **).

Um ein beliebiges Stück der Hyperbel durch eine stetige Bewegung zu beschreiben, richte man ein Lineal so ein, daß es sich um den Punkt F′ drehen läßt, befestige dann in dem Endpunkt R desselben und in dem Brennpunkt F einen Faden, dessen Länge um II′ kleiner ist als F′R, und bewege das Lineal um F′, während man einen Stift M dergestalt an demselben hingleiten läßt, daß der Faden RMF während der Bewegung

---

*) Wird bei der Ellipse a = b, so wird c = 0 und die Ellipse geht in den Kreis über. Bei der Hyperbel können a und b in jedem beliebigen Verhältniß zu einander stehen. Ist a = b, so nennt man die Hyperbel gleichseitig. Die gleichseitige Hyperbel ist für die Hyperbeln überhaupt, was der Kreis für die Ellipsen ist. Wenn die gleichseitige Hyperbel über einer Axe 2a beschrieben wäre, so würde man aus ihren Ordinaten die einer jeden andern durch dieselben Scheitel gehenden Hyperbel herleiten, wenn man sie nach dem Verhältniß von a : b verlängerte oder verkürzte. Uebers.

**) Am bequemsten nimmt man auf der erweiterten Axe vom Scheitel aus jenseits des Brennpunkts beliebige Punkte Q, Q′ . . . an, und beschreibt mit IQ und I′Q, mit IQ′ und I′Q′ . . . sowohl aus F als aus F′ Bogen über und unter der Axe; die Durchschnitte derselben geben dann je vier Punkte der Hyperbel. Uebers.

immer gespannt bleibt. Auf diese Weise wird der Stift einen Bogen beschreiben, welcher zu der Hyperbel gehört, deren Axe II' und deren Brennpunkte F und F' sind *).

§. 134.

Ich stelle mir nun noch folgende Aufgabe: **eine Curve von der Beschaffenheit zu finden, daß jeder ihrer Punkte von einer der Lage nach gegebenen geraden Linie AC,** *Fig.* **48, eben so weit entfernt sei, als von einem gegebenen Punkt F.**

Nimmt man auf der durch den Punkt F senkrecht auf AC gezogenen Geraden AB einen in der Mitte des Abstandes AF liegenden Punkt I an, so muß derselbe nothwendig zur gesuchten Curve gehören, weil er von der Geraden AC eben so weit, als von dem Punkt F entfernt ist. Setzt man nun

$$IF = AI = c', \quad IP = x, \quad PM = y,$$

so wird für irgend einen Punkt M der Abstand

$$QM = AP = AI + IP = c' + x$$

sein, und das rechtwinklige Dreieck FPM wird geben

$$MF = \sqrt{\overline{PF}^2 + \overline{PM}^2} = \sqrt{(c' - x)^2 + y^2},$$

weil FP = IF — IP ist. Nach gehöriger Entwickelung wird man finden

$$MF = \sqrt{c'^2 - 2c'x + x^2 + y^2};$$

und da der Bedingung der Aufgabe gemäß QM = MF sein muß, so wird folgen

$$c' + x = \sqrt{c'^2 - 2c'x + x^2 + y^2},$$

woraus man durch Quadrirung und nach gehöriger Reduction erhält

$$2c'x = -2c'x + y^2 \quad \text{oder} \quad y^2 = 4c'x,$$

die Gleichung der Parabel (§. 128).

---

*) Verlangt man die gleichseitige Hyperbel, in der $c^2 = 2a^2$, also $II' = c\sqrt{2}$ ist, so muß die Länge des Fadens dem gemäß genommen werden. Uebers.

§. 135.

Um die Curve nach der Eigenschaft, welche ich so eben zur Erforschung ihrer Gleichung angewendet habe, zu construiren, muß man mit einem nach Belieben genommenen Halbmesser FM, der jedoch größer als IF sein muß, einen Kreisbogen beschreiben, AP = FM nehmen, und durch den Punkt P mit der Linie AC eine Gerade PM parallel ziehen; der Punkt M, in welchem diese Gerade den Bogen schneidet, wird zur gesuchten Parabel gehören; denn es ist offenbar die Linie QM, welche der AP gleich und parallel ist, auch der FM gleich.

Dieselbe Eigenschaft giebt auch ein Mittel an die Hand, die Curve durch eine stetige Bewegung zu beschreiben. Man lege zu dem Ende längs der Linie AC ein Lineal, an welchem man einen Winkelhaken fortschiebt, dessen eine Seite die Gerade QF vorstellt, befestige hierauf im Punkt F das Ende eines Fadens, dessen Länge der QE gleich ist und dessen anderes Ende im Punkt E haftet, und drücke während der Bewegung des Winkelhakens diesen Faden mit einem Stift dergestalt an die Seite QE, daß er immer gespannt bleibt; der Stift wird so einen parabolischen Bogen beschreiben.

§. 136.

Die Aufgabe, welche so eben zur Gleichung der Parabel geführt hat, kann dergestalt modificirt werden, daß sie alle drei Curven des zweiten Grades in sich begreift. Sie braucht in dieser Hinsicht nur folgendermaßen gefaßt zu werden: die Gleichung einer Curve zu finden, in welcher der Abstand irgend eines Punkts M von einem festen Punkt F, *Fig.* 49, zu dem Abstande MQ eben dieses Punkts M von einer der Lage nach gegebenen geraden Linie AC ein beständiges Verhältniß habe.

Ist 1 : n dieses Verhältniß und wird vom Punkt F auf AC die Senkrechte AB gezogen, so muß die Curve offenbar diese Gerade im Punkt I dergestalt schneiden, daß

$$IF : AI = 1 : n$$

ist, so daß, wenn man IF durch c' bezeichnet,

$$AI = nc'$$

sein wird. Setzt man nun $IP = x$, $PM = y$, so erhält man vermittelst des rechtwinkligen Dreiecks PMF, eben so wie oben,

$$MF = \sqrt{(c' - x)^2 + y^2};$$

und da

$$QM = AP = AI + IP = nc' + x$$

ist, so wird man haben

$$\sqrt{(c' - x)^2 + y^2} : nc' + x = 1 : n,$$

woraus man zieht

$$nc' + x = n\sqrt{(c' - x)^2 + y^2}.$$

Durch Quadrirung erhält man endlich

$$n^2y^2 + (n^2 - 1)\,x^2 - 2\,(n + 1)\,nc'x = 0.$$

Diese Gleichung, welche mit der Gleichung $A't'^2 + C'u'^2 - E'u' = 0$ (§. 128) eine ganz ähnliche Form hat, wird zur Ellipse, zur Hyperbel oder zur Parabel gehören, je nachdem $n > 1$, $n < 1$ oder $n = 1$ ist; sie zeigt folglich, daß die Eigenschaft, welche den Gegenstand der vorgelegten Aufgabe ausmacht, allen drei Curven vom zweiten Grade gemein ist; und in Rücksicht auf dieselbe wird die gerade Linie AC die **Leitlinie** (*Directrix*) genannt *).

Giebt man der obigen Gleichung die Form

$$y^2 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)x^2 - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)c'x = 0,$$

---

*) Die hier bewiesene allgemeine Eigenschaft der Curven der zweiten Ordnung kann folgendermaßen zu einer gemeinschaftlichen Erklärung derselben dienen: ein Punkt M, der sich in einer Ebene dergestalt bewegt, daß das Verhältniß seiner Entfernung von einem in derselben Ebene befindlichen Punkt F zu seiner Entfernung von einer in ihr der Lage nach gegebenen geraden Linie AC constant bleibt, beschreibt entweder eine Ellipse, oder eine Parabel, oder eine Hyperbel, je nachdem jene Entfernung entweder kleiner, eben so groß oder größer als diese ist. Uebers.

und erwägt, daß die Brüche $\frac{1}{n^2}$ und $\frac{1}{n}$ um so kleiner werden, je größer n wird, so wird man sich überzeugen, daß sie sich, wenn n unendlich ist, auf

$$y^2 + x^2 - 2c'x = 0$$

reducirt, welches die Gleichung des Kreises für den Halbmesser c' ist, wenn der Anfangspunkt der Abscissen in einem der Endpunkte des Durchmessers angenommen wird (§. 94) *).

§. 137.

Im §. 128 ist gezeigt worden, daß die Ellipse, Hyperbel und Parabel durch eine einzige Gleichung dargestellt werden können. Diese Gleichung läßt sich auch unmittelbar aus jeder der Gleichungen

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

herleiten, die, da sie sich auf den Mittelpunkt beziehen, bloß der Ellipse und Hyperbel anzugehören scheinen. Zu diesem Ende braucht man nur den Anfangspunkt der Coordinaten in einen der Scheitel der durch sie vorgestellten Curven zu versetzen. Macht man in den Figuren 45 und 47 IP = x', so hat man in der ersten

$$x \text{ oder } OP = OI - IP = a - x',$$

und in der zweiten

x oder

---

*) Wird die Excentricität der Ellipse mit c und ihre große Axe mit 2a bezeichnet, so ist, wenn ihre Scheitel I und I' sind, AI = n (a — c) und I'A = n (a + c). Hieraus folgt n (a — c) = n (a + c) — 2 a, mithin

$$c = \frac{a}{n}.$$

Ist c = 0, wie beim Kreise, so ist n unendlich groß. Je kleiner n bei unverändertem a wird, um so größer wird c, also um so excentrischer die Ellipse. Ist n = 1, so ist c = a. Für ein endliches a ist dann IF = 0 und für ein endliches IF ist a unendlich groß. Ist n $<$ 1, wie bei der Hyperbel, so ist c $>$ a. Uebers.

$$x \text{ oder } OP = OI + IP = a + x'.$$

Die Substitution dieser Werthe verwandelt obige Gleichungen in folgende:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x' - \frac{b^2}{a^2} x'^2, \quad y^2 = \frac{2b^2}{a} x' + \frac{b^2}{a^2} x'^2,$$

welche die Form

$$y^2 = px' - \frac{p}{2a} x'^2, \quad y^2 = px' + \frac{p}{2a} x'^2$$

annehmen, wenn man $\frac{2b^2}{a} = p$ setzt. Beide unterscheiden sich nur durch das Zeichen von a; auch zeigt *Fig.* 47, daß, wenn IP positiv genommen wird, die Axe II' nothwendiger Weise negativ ist *).

Setzt man für b^2 den Werth, den diese Größe sowohl in der Ellipse als in der Hyperbel hat, so erhält man

in jener $p = \frac{2(a^2 - c^2)}{a}$ (130), in dieser $p = \frac{2(c^2 - a^2)}{a}$ (132).

Führt man hier statt c oder OF den Abstand IF ein, und bezeichnet ihn mit c', so hat man in *Fig.* 45

$$c \text{ oder } OF = OI - IF = a - c'$$

und in *Fig.* 47

$$c \text{ oder } OF = OI + IF = a + c'.$$

Diese Werthe geben

---

*) Nimmt man die positiven Abscissen an der Seite des Scheitels I, nach welcher sich die Curve krümmt, so ist bei der Ellipse, die keine andere Abscissen zuläßt, die Axe positiv, bei der Hyperbel negativ. Behält man übrigens, die Abscissen vom Scheitel rechnend, in den Gleichungen beider Curven die Axen bei, so erhält man für die Ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

und für die Hyperbel

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 \mp 2ax).$$

In der letzteren gilt das Minuszeichen oder das Pluszeichen, je nachdem man die Abscissen entweder nach der Richtung der Zwerchaxe oder nach der entgegengesetzten nimmt. Uebers.

$$p = \frac{4ac' - 2c'^2}{a}, \quad p = \frac{4ac' + 2c'^2}{a},$$

je nachdem von der Ellipse oder Hyperbel die Rede ist, und diese Ausdrücke unterscheiden sich auch nur durch das Zeichen von a.

Beide in der Formel

$$p = \frac{4ac' \mp 2c'^2}{a} = 4c' \mp \frac{2c'^2}{a}$$

vereinigt, haben zur Gränze

$$p = 4c',$$

wenn man a unendlich nimmt. In diesem Fall gehen aber die Gleichungen

$$y^2 = px' \mp \frac{p}{2a} x'^2$$

in $\qquad y^2 = px' \quad$ oder $\quad y^2 = 4c'x'$

über, welches die Gleichung der Parabel ist (§. 134).

Die Gleichung

$$y^2 = px' - \frac{p}{2a} x'^2$$

stellt also alle Linien der zweiten Ordnung dar; sie gehört der Ellipse an, wenn a positiv, und dem Kreise, wenn $p = 2a$, der Hyperbel, wenn a negativ, und der Parabel, wenn a unendlich ist *).

---

*) Der Ausdruck $p = \frac{4ac' - 2c'^2}{a}$, welcher sich auf die Ellipse bezieht, würde einen negativen Werth annehmen, wenn man $c' > 2a$ setzte, und die Gleichung $y^2 = px, - \frac{p}{2a} x'^2$, die sich dann in

$$y^2 = -px' + \frac{p}{2a} x'^2$$

verwandelte, würde der Hyperbel angehören; aber c' drückt nun den Abstand des Scheitels von dem entferntesten Brennpunkt oder IF', *Fig.* 47, aus. Verf. — Die Gleichung $y^2 = px' - \frac{p}{2a} x'^2$ enthält zugleich den Grunde der Benennungen Ellipse und Hyperbel, wovon jene einen Mangel, diese einen Ueberschuß bezeichnet. Man muß nämlich

§. 138.

Die Größe p wird der Parameter genannt. Sie ist in der Ellipse und Hyperbel die dritte Proportionallinie zu den beiden Axen, weil ihr Werth

$$p = \frac{2\,b^2}{a} = \frac{4\,b^2}{2a}$$

die Proportion giebt

$$2a : 2b = 2b : p.$$

In allen drei Curven der zweiten Ordnung drückt der Parameter den Werth der doppelten durch den Brennpunkt gehenden Ordinate aus. Nimmt man nämlich

$$x' = c',$$

so hat man

$$y^2 = pc' \mp \frac{p}{2a}\,c'^2 = \frac{p(2\,ac' \mp c'^2)}{2\,a},$$

woraus man folgert

$$4\,y^2 = p\,\frac{4\,ac' \mp 2\,c'^2}{a} = p^2 \text{ d. i. } 2\,y = p\text{ *)}.$$

---

das Quadrat der Ordinate der Parabel, nämlich px', um $\frac{p}{2a}\,x'^2$ entweder vermindern oder vermehren, wenn es für dieselbe Absciſſe zum Quadrat der Ordinate entweder in der Ellipse oder in der Hyperbel werden soll.

Uebers.

*) Der Satz, daß der halbe Parameter die Ordinate im Brennpunkt ist, ergiebt sich auch sehr einfach aus den Gleichungen $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ und $y^2 = 4\,c'x$ der Ellipse, Hyperbel und Parabel. Setzt man nämlich in den beiden ersten $x = c$ und in der letztern $x = c'$, so erhält man aus jener $y = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{2}p$ und aus der letztern $y = 2c' = \frac{1}{2}p$. Bei der Ellipse und Hyperbel giebt es fünf constante Linien, a, b, c, c' und p, welche durch folgende Gleichungen mit einander verbunden sind: $c^2 = a^2 - b^2$ und $c' = a - c$ für die Ellipse, $c^2 = a^2 + b^2$ und $c' = c - a$ für die Hyperbel, $\frac{2\,b^2}{a} = p$ für beide Curven. Man sieht, daß je zwei dieser Linien die drei übrigen bestimmen, so daß sowohl

§. 139.

Die Gleichungen

$$y^2 = px' \mp \frac{p}{2a} x'^2$$

unter die Form

$$y^2 = \frac{p}{2a} (2ax' - x'^2), \quad y^2 = \frac{p}{2a} (2ax' + x'^2)$$

gebracht, geben die folgenden

$$\frac{y^2}{x'(2a - x')} = \frac{p}{2a}, \quad \frac{y^2}{x'(2a + x')} = \frac{p}{2a},$$

aus denen man ersieht, daß das Quadrat der Ordinate PM in einem constanten Verhältniß zum Produkt der Linien IP und I'P steht, welche für die Ellipse x' und $2a - x'$, *Fig.* 45, und für die Hyperbel x' und $2a + x'$, *Fig.* 47, sind *). Nennt man diese Abstände des Endpunkts P der Ordinate von den beiden Scheiteln der Curve Abscissen, so **verhalten sich in der Ellipse und Hyperbel die Quadrate der Ordinaten, wie die Produkte der zugehörigen Abscissen.**

Wenn man nämlich eine von x' verschiedene Abscisse, die aber noch immer von demselben Scheitel gerechnet wird, mit X' bezeichnet und die entsprechende Ordinate mit Y, so hat man die Gleichungen

$$Y^2 = \frac{p}{2a} (2aX' - X'^2), \quad Y^2 = \frac{p}{2a} (2aX' + X'^2)$$

woraus sich ergiebt für die Ellipse

$$y^2 : Y^2 = x'(2a - x') : X'(2a - X'),$$

---

die Ellipse als die Hyperbel vollkommen bestimmt sind, so bald man von den fünf constanten Linien zwei kennt. Im Kreise ist $a = b$, $c = 0$, $c' = a$ und $p = 2a$. In der Parabel hat man nur zwei constante Linien c' und p, von denen die zweite viermal so groß als die erste ist. Diese Curve wird also, eben so wie der Kreis, durch eine einzige Linie bestimmt. Uebers.

*) Beim Kreise ist $p = 2a$, also auch $y^2 = x'(2a - x')$, wie schon die Elementargeometrie lehrt. Uebers.

und für die Hyperbel

$$y^2 : Y^2 = x'(2a + x') : X'(2a + X'),$$

indem man in dem letzteren Verhältniß einer jeden dieser Proportionen den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{p}{2a}$ wegläßt.

Die Gleichung der Parabel giebt, wenn sie auf gleiche Weise behandelt wird, bloß

$$y^2 : Y^2 = x' : X',$$

woraus erhellet, **daß in der Parabel die Quadrate der Ordinaten sich wie die zugehörigen Abscissen verhalten.**

§. 140.

Aus der Vergleichung der in §. 120. und 128 beigebrachten Formeln ergiebt sich, daß bei jeder Curve vom zweiten Grade wenigstens zwei Systeme von Coordinaten vorhanden sind, in welchen sich ihre Gleichung unter der einfachsten Form darstellt; das eine ist das der Axen, und das andere das der conjugirten Durchmesser. Ich werde nun zeigen, daß es eine unendliche Anzahl solcher Coordinatensysteme giebt. Zu diesem Ende werde ich die Umformung der Coordinaten auf die Gleichungen anwenden, welche sich auf die Axen beziehen.

Ich nehme zuerst die Gleichung der Ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \quad \text{oder} \quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

vor, und bemerke zuvörderst, daß kein Grund vorhanden ist, den Anfangspunkt der Coordinaten aus dem Mittelpunkt zu verlegen. Da also nur noch die Richtung der Axen zu verändern ist, so setze ich bloß

$$x = mt + pu, \quad y = nt + qu \text{ (§. 122).}$$

Ich lasse den Winkel der neuen Coordinaten, dessen Cosinus oben (§. 123) mit h bezeichnet worden ist, unbestimmt und berücksichtige folglich die Gleichung

$$mp + nq + (np + mq)\,g = h$$

gar nicht. Ganz anders verhält es sich mit den Gleichungen

$$m^2 + n^2 + 2gmn = 1, \quad p^2 + q^2 + 2gpq = 1;$$

denn da die Coordinaten x und y auf einander senkrecht sind, so ist $g = 0$, woraus sich ergiebt

$$m^2 + n^2 = 1, \quad p^2 + q^2 = 1.$$

Von den vier Größen m, n, p und q bleiben demnach nur zwei zu möglich beliebiger Annahme übrig. Setzt man nun die Werthe von x und y in die Gleichung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

so wird man erhalten

$$(a^2n^2 + b^2m^2)\,t^2 + 2\,(a^2nq + b^2mp)\,tu + (a^2q^2 + b^2p^2)\,u^2 = a^2b^2,$$

und um diese letztere zu vereinfachen, will ich

$$a^2nq + b^2mp = 0$$

setzen, wodurch sie sich auf

$$(a^2n^2 + b^2m^2)\,t^2 + (a^2q^2 + b^2p^2)\,u^2 = a^2b^2$$

reducirt. Um diese Gleichung mit

$$a'^2t^2 + b'^2u^2 = a'^2b'^2$$

zu vergleichen, bringe man beide unter folgende Form:

$$\frac{a^2n^2 + b^2m^2}{a^2b^2}\,t^2 + \frac{a^2q^2 + b^2p^2}{a^2b^2}\,u^2 = 1,$$

$$\frac{t^2}{b'^2} + \frac{u^2}{a'^2} = 1;$$

sie können dann unabhängig von t und u nur identisch werden unter der Voraussetzung

$$\frac{1}{b'^2} = \frac{a^2n^2 + b^2m^2}{a^2b^2}, \quad \frac{1}{a'^2} = \frac{a^2q^2 + b^2p^2}{a^2b^2}$$

oder

$$b'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2n^2 + b^2m^2}, \quad a'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2q^2 + b^2p^2}.$$

Um sich von der Möglichkeit dieser Umformung zu versichern, muß man sehen, ob die Bestimmung der Größen m, n, p und q keiner Ausnahme unterworfen ist. Die Gleichung

$$a^2nq + b^2mp = 0,$$

unter die Form

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{q}{p} = -\frac{b^2}{a^2}$$

gebracht, wird immer das Verhältniß von p zu q oder das von m zu n zu erkennen geben. Wenn man daraus

$$\frac{q}{p} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{m}{n}$$

zieht, und zur Abkürzung

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{m}{n} = -r$$

setzt, so erhält man

$$q = pr.$$

Substituirt man diesen Werth in $p^2 + q^2 = 1$, so wird man daraus herleiten

$$p^2(1 + r^2) = 1,$$

woraus sich ergiebt

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}}, \qquad q = \frac{r}{\sqrt{1 + r^2}},$$

Ausdrücke, die immer reell bleiben, wie auch r beschaffen sein mag. Da die Gleichung $m^2 + n^2 = 1$ nur eine der beiden Größen m und n bestimmen kann, so bleibt das Verhältniß $\frac{n}{m}$, welches in den Ausdrücken für p und q vorkommt, unbestimmt, welche Größen aus dieser Ursache einer unendlichen Anzahl verschiedener Werthe fähig sind. Es giebt also wirklich eine unendliche Anzahl von Coordinatensystemen, in denen die Gleichung der Ellipse die Form

$$a'^2 t^2 + b'^2 u^2 = a'^2 b'^2$$

hat, welche der der Gleichung für die Axen

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

durchaus ähnlich ist.

§. 141.

Wenn man die Gleichung der Hyperbel

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \quad \text{oder} \quad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

auf dieselbe Weise behandelt, wie die der Ellipse, so wird man erhalten

$$(a^2n^2 - b^2m^2)t^2 + 2(a^2nq - b^2mp)tu + (a^2q^2 - b^2p^2)u^2 = -a^2b^2,$$

$$a^2nq - b^2mp = 0,$$

$$\frac{a^2n^2 - b^2m^2}{a^2b^2}t^2 + \frac{a^2q^2 - b^2p^2}{a^2b^2}u^2 = -1;$$

und vergleicht man die letztere Gleichung mit

$$\frac{t^2}{b'^2} - \frac{u^2}{a'^2} = -1,$$

so findet man

$$b'^2 = \frac{-a^2b^2}{a^2n^2 - b^2m^2}, \quad a'^2 = -\frac{a^2b^2}{a^2q^2 - b^2p^2}.$$

Die Ausdrücke für p und q werden in diesem Fall von derselben Form, wie in dem vorhergehenden sein, folglich nach der verschiedenen Annahme von $\frac{n}{m}$ eine unendliche Menge von Werthen geben. Man ist also berechtigt, bei der Hyperbel einen ähnlichen Schluß zu machen, wie bei der Ellipse.

§. 142.

Ich gehe nun zur Parabel fort. Ihre Gleichung $y^2 = 4c'x$ läßt sich nicht durch die Formeln

$$x = mt + pu, \quad y = nt + qu$$

in eine andere ihr ähnliche umgestalten; denn man erhält durch die Substitution

$$n^2t^2 + 2nqtu + q^2u^2 = 4c'(mt + pu),$$

aus welcher man die Glieder, die mit t^2, tu und u behaftet sind, verschwinden lassen müßte, was geschehen würde, wenn man $n = 0$ und $p = 0$ setzte; daraus würde aber $m = 1$, $q = 1$, $x = t$, $y = u$ folgen, so daß man auf die ursprünglichen Coordinaten wieder zurückkäme. Dies wird aber nicht der Fall sein, wenn man zugleich den Anfangspunkt der Coor-

dinaten versetzt. Substituirt man für x und y ihre allgemeinsten Werthe

$$mt + pu + \alpha, \quad nt + qu + \beta \text{ (§. 122)},$$

so wird man erhalten

$$\left.\begin{array}{l} n^2t^2 + 2nqtu + q^2u^2 \\ \quad + 2\beta(nt + qu) - 4c'(mt + pu) \\ \quad + \beta^2 - 4\alpha c' \end{array}\right\} = 0.$$

Da man nun wegen der beiden neuen unbestimmten α und β über vier Größen schalten kann, so lasse man die mit tu und t behafteten, und die von t und u unabhängigen Glieder verschwinden, indem man

$$2nq = 0, \quad 2\beta n - 4c'm = 0, \quad \beta^2 - 4\alpha c' = 0$$

setzt. Der ersten dieser Gleichungen kann auf zweierlei Art ein Genüge geschehen, entweder durch $n = 0$ oder durch $q = 0$; allein $n = 0$ giebt in der zweiten Gleichung $m = 0$, was mit der Gleichung $m^2 + n^2 = 1$ nicht bestehen kann. Nimmt man $q = 0$, so verschwindet das Glied q^2u^2, und es bleibt nur noch

$$n^2t^2 = 4c'pu$$

oder

$$t^2 = \frac{4c'pu}{n^2},$$

eine Gleichung, welche der auf die Axe der Curve sich beziehenden ähnlich ist. Die Annahme $q = 0$ in die Gleichung $p^2 + q^2 = 1$ eingeführt, giebt

$$p = \pm 1;$$

aus $2\beta n - 4c'm = 0$ zieht man

$$\frac{n}{m} = \frac{2c'}{\beta},$$

und diese Gleichung mit $m^2 + n^2 = 1$ verbunden, bestimmt n und m. Die Gleichung $\beta^2 - 4\alpha c' = 0$, giebt noch α, wenn β bekannt ist; die letztere Größe bleibt aber jedes Werths fähig *).

---

*) Die Axe der u in den hier (§. 140 — 142) für die Ellipse, Hyperbel und Parabel entwickelten Gleichungen

Es muß hier noch bemerkt werden, daß die in §. 139 in Bezug auf die Axen ausgesprochenen Eigenschaften auch gleicher Maaßen für die conjugirten Durchmesser Gültigkeit haben, da sie keineswegs von dem Coordinatenwinkel, sondern nur von der Form der Gleichungen, welche den drei Curven entsprechen, abhängig sind, diese aber für die conjugirten Durchmesser eben dieselbe ist, wie für die Axen.

§. 143.

Die vorstehenden Betrachtungen führen auf folgende Aufgabe: **es ist irgend ein Durchmesser gegeben, man soll die Lage des zugeordneten finden.** Man wird sie auflösen, wenn man erwägt, daß, wenn in *Fig.* 43 (§. 122) der Winkel CAB der ursprünglichen Coordinaten x und y ein rechter ist, die Dreiecke $P''A'''R$ und $P''MQ$ rechtwinklig werden, das eine in R, das andere in Q, woraus folgt, daß $m = \frac{A'''R}{A'''P''}$ der Cosinus des Winkels $P''A'''R$ oder $B''A'''B'$ und $n = \frac{P''R}{A'''P''}$ der Sinus desselben ist; daß $p = \frac{P''Q}{P''M}$ den Cosinus des Winkels $MP''Q$ oder $C''A'''B'$, und $q = \frac{QM}{P''M}$ den Sinus desselben ausdrückt.

$$a'^2 t^2 + b'^2 u^2 = a'^2 b'^2,$$
$$a'^2 t^2 - b'^2 u^2 = - a'^2 b'^2,$$
$$t^2 = \frac{4 c' m u}{q^2}$$

geht bei den ersten beiden Curven durch den Mittelpunkt und bei der letztern durch irgend einen ihrer Punkte der Axe parallel. Die Form aller drei Gleichungen zeigt auf den ersten Blick, daß diese Abscissenaxe allemal ein Durchmesser sein müsse, in dem Sinn, wie dieses Wort §. 111 erklärt worden ist. Dasselbe gilt von der Axe der Ordinaten in den beiden ersten Gleichungen, wie man sogleich sieht, wenn man die u in t ausdrückt. Die Axen der u und t sind mithin bei der Ellipse und Hyperbel allemal conjugirte Durchmesser (§. 113). Uebers.

Macht man nun die Anwendung hievon auf die 50ste und 51ste Figur, indem man II′ für die Axe der x, OF für die der t und OH für die der u nimmt, so erhält man

$$\frac{n}{m} = \frac{\sin FOI}{\cos FOI} = tg\, FOI,$$

$$\frac{q}{p} = \frac{\sin HOI}{\cos HOI} = tg\, HOI,$$

und da die Gleichungen

$$a^2nq + b^2mp = 0,$$
$$a^2nq - b^2mp = 0,$$

welche sich in §. 140 und 141 ergeben haben, unter die Form

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{q}{p} = \mp \frac{b^2}{a^2}$$

gebracht werden können, so entsteht

$$tg\, FOI\; tg\, HOI = \mp \frac{b^2}{a^2},$$

wo sich das obere Zeichen auf die Ellipse, das untere auf die Hyperbel bezieht; man wird also leicht den einen der Winkel FOI und HOI bestimmen, wenn der andere bekannt ist *).

§. 144.

In der Ellipse, *Fig.* 50, kann man an die Stelle der Winkel FOI und HOI die Coordinaten der Punkte F und H setzen; denn bezeichnet man

OE mit α, EF mit β,
OG mit α', GH mit β',

---

*) Für die Ellipse ist

$$tg\, HOI = -\frac{b^2}{a^2} \cot FOI.$$

Um sich das Minuszeichen zu erklären, muß man bedenken, daß es eigentlich der Winkel H′OI ist, dem q und p als Sinus und Cosinus angehören, wie die Vergleichung der 43- und 50sten Figur zeigt. Aus dem Zeichen ergiebt sich, daß dieser Winkel bei der Ellipse stumpf ist. Nimmt man dafür, wie es hier geschehen ist, den spitzen Winkel HOI, so ist seine Tangente gleichfalls negativ, weil zu einem negativen Bogen eine negative Tangente gehört. Uebers.

so hat man

$$tg\ FOI = \frac{FE}{OE} = \frac{\beta}{\alpha},$$

$$tg\ HOI = \frac{GH}{OG} = \frac{\beta'}{\alpha'},$$

mithin

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} = -\frac{b^2}{a^2},$$

woraus folgt

$$a^2\beta\beta' + b^2\alpha\alpha' = 0,$$

eine Gleichung, die verbunden mit der der Ellipse

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = a^2b^2, \quad a^2\beta'^2 + b^2\alpha'^2 = a^2b^2$$

entweder α und β oder α' und β' giebt, d. i. einen der Punkte F und H, wenn man den anderen kennt.

In der Hyperbel, *Fig.* 51, gehören α und β nicht mehr einem Punkt der Curve an, weil der Durchmesser OF sie nicht schneidet; da es aber hier nur auf seine Richtung ankommt, so kann man statt des Punkts F den Punkt R nehmen, welcher der Abscisse OI entspricht, und dem gemäß setzen

$$\alpha = OI = a, \quad \beta = IR,$$

welches geben wird

$$tg\ FOI = \frac{\beta}{a} \quad \text{und} \quad \frac{\beta}{a} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{b^2}{a^2},$$

woraus folgt

$$a\beta\beta' - b^2\alpha' = 0.$$

Bestimmt man hier β, so erhält man den Punkt R; man muß aber diese Gleichung mit der Gleichung

$$a^2\beta'^2 - b^2\alpha'^2 = -a^2b^2$$

der Hyperbel combiniren, wenn es der Punkt H ist, den man sucht.

§. 145.

In der Parabel hat man q = 0; hieraus folgt, daß die Axe OH der u, *Fig.* 52, der Axe der x parallel ist, und daß

ihre Lage bloß vom Punkt O abhängt, in welchem sie die Curve trifft, und für den $t = 0$, $u = 0$ ist. Alsdann stellen α und β die Coordinaten IG und OG dar: man hat $\beta^2 = 4c'\alpha$ und die Gleichung $\frac{n}{m} = \frac{2c'}{\beta}$ giebt die trigonometrische Tangente des zwischen den Axen der t und u eingeschlossenen Winkels.

Ich bemerke hier beiläufig, daß, wenn man die Lage des Durchmessers gefunden hat, der einem gegebenen zugeordnet ist, man zugleich die Lage der Tangente für den Punkt der Curve hat, in welchem sie von dem gegebenen Durchmesser geschnitten wird; und wirklich ist sowohl in der Ellipse als in der Hyperbel, *Fig.* 50 und 51, der Durchmesser OF der Tangente HT parallel (vergl. §. 121), und in der Parabel, *Fig.* 52, ist dieser Durchmesser selbst die Tangente der Curve im Punkt O.

Kann man umgekehrt durch jeden beliebigen Punkt der Curve die Tangente legen, so hat man sogleich die Lage des Durchmessers, der dem zum Berührungspunkt gezogenen zugeordnet ist.

§. 146.

In den Gleichungen

$$a'^2t^2 + b'^2u^2 = a'^2b'^2, \quad a'^2t^2 - b'^2u^2 = - a'^2b'^2,$$

von denen die erste der Ellipse, die zweite der Hyperbel angehört (§. 140 und 141), stellen die Buchstaben a' und b' die halben mit einander verbundenen Durchmesser vor; denn wenn $t = 0$, so ist

$$u = a' \text{ oder } OH = a' \ (Fig.\ 50 \text{ und } 51),$$

und wenn $u = 0$, so ist

$$t^2 = b'^2 \text{ oder } t^2 = - b'^2,$$

welches für die Hyperbel so wie für die Ellipse $OF = b'$ giebt *).

---

*) Die Gleichung $t^2 = - b^2$ oder $t = \sqrt{- b^2}$ bei der Hyperbel zeigt an, daß es in ihr eigentlich gar keinen durch die Curve selbst begränz-

Man sieht leicht, daß die Größen m, n, p, q vermittelst der Gleichungen $m^2 + n^2 = 1$, $p^2 + q^2 = 1$ und vermittelst der Ausdrücke für a'^2 und b'^2 aus der Bedingungsgleichung, welche die gegenseitige Lage der conjugirten Durchmesser bestimmt, eliminirt werden können, und daß sich so eine Relation zwischen diesen Linien und den Axen ergeben muß. Die Rechnung wird auf folgende Weise ganz einfach geführt.

Man erhält zuerst aus den Ausdrücken für a'^2 und b'^2 in der Ellipse (§. 140) die Gleichungen

$$a'^2a^2q^2 + a'^2b^2p^2 = a^2b^2,\quad b'^2a^2n^2 + b'^2b^2m^2 = a^2b^2;$$

verbindet man hiermit

$$q^2 + p^2 = 1,\quad n^2 + m^2 = 1,$$

so hat man zwei Systeme von Gleichungen, das eine mit q^2 und p^2, das andere mit n^2 und m^2. Das erste System giebt sogleich

$$q^2 = \frac{a^2b^2 - a'^2b^2}{a'^2a^2 - a'^2b^2} = \frac{b^2(a^2 - a'^2)}{a'^2(a^2 - b^2)},$$

$$p^2 = \frac{a'^2a^2 - a^2b^2}{a'^2a^2 - a'^2b^2} = \frac{a^2(a'^2 - b^2)}{a'^2(a^2 - b^2)}.$$

Um n^2 und m^2 zu erhalten, genügt es, in diesen Werthen a' in b' zu verwandeln, und es ergiebt sich

$$n^2 = \frac{b^2(a^2 - b'^2)}{b'^2(a^2 - b^2)},$$

$$m^2 = \frac{a^2(b'^2 - b^2)}{b'^2(a^2 - b^2)}.$$

Wenn man nun die Bedingungsgleichung (§. 140)

$$a^2nq + b^2mp = 0 \quad \text{oder} \quad a^2nq = - b^2mp$$

zum Quadrat erhebt, so erhält man

$$a^4n^2q^2 = b^4m^2p^2,$$

und substituirt man in diese Gleichung die Werthe von n^2, m^2,

---

ten zugeordneten Durchmesser giebt. Man nennt indessen, der Analogie mit der Ellipse wegen, die Doppelordinate, welche in der Ellipse der Abscisse u = 0 angehört, auch bei der Hyperbel den zugeordneten Durchmesser. Vergl. §. 128. Uebers.

q^2 und p^2, so findet sich nach Weglassung der gleichen Nenner

$$(a^2 - a'^2)(a^2 - b'^2) = (a'^2 - b^2)(b'^2 - b^2),$$

woraus nach gehöriger Entwickelung, Reduktion und Zerlegung in Factoren entsteht

$$(a^4 - b^4) - (a^2 - b^2)(a'^2 + b'^2) = 0,$$

und läßt man noch den gemeinschaftlichen Faktor $a^2 - b^2$ weg, so hat man endlich

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 \text{ oder } \overline{OH}^2 + \overline{OF}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{OL}^2.$$

Da die Ausdrücke für a'^2 und b'^2 in der Hyperbel (§. 141) auf die Gleichungen

$$a'^2a^2q^2 - a'^2b^2p^2 = -a^2b^2, \quad b'^2a^2n^2 - b'^2b^2m^2 = a^2b^2$$

führen, und die Bedingungsgleichung

$$a^2nq - b^2mp = 0$$

ist, so sieht man, daß es hinreichend ist, b^2 und b'^2 in der vorstehenden Rechnung negativ zu nehmen, um sie der Hyperbel anzupassen, und daß man folglich in dieser Curve hat

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2, \text{ oder } \overline{OH}^2 - \overline{OF}^2 = \overline{OI}^2 - \overline{OL}^2;$$

es ist daher bei der Ellipse die Summe der Quadrate der halben conjugirten Durchmesser und bei der Hyperbel der Unterschied derselben der Summe der Quadrate der halben Axen oder ihrem Unterschiede gleich.

§. 147.

Wenn man die Ausdrücke für a'^2 und b'^2 bei der Ellipse in einander multiplicirt, so wird man erhalten

$$a'^2b'^2 = \frac{a^4b^4}{a^4n^2q^2 + a^2b^2n^2p^2 + a^2b^2m^2q^2 + b^4m^2p^2};$$

quadrirt man aber die Gleichung $a^2nq + b^2mp = 0$, so entsteht

$$a^4n^2q^2 + 2a^2b^2mnpq + b^4m^2p^2 = 0$$

oder

$$a^4n^2q^2 + b^4m^2q^2 = -2a^2b^2mnpq,$$

und vermittelst dieses Werthes kann man das erste nud letzte Glied des Nenners im Ausdruck für $a'^2b'^2$ wegschaffen, welcher werden wird

$$a'^2 b'^2 = \frac{a^4 b^4}{a^2 b^2 n^2 p^2 - 2 a^2 b^2 m n p q + a^2 b^2 m^2 q^2}$$
$$= \frac{a^2 b^2}{(np - mq)^2};$$

nimmt man auf beiden Seiten die Quadratwurzel, so wird man haben

$$a'b' = \frac{ab}{np - mq} \text{ oder } a'b'(np - mq) = ab.$$

Die Größe $np - mq$ ist hier nichts anderes, als der Sinus des Winkels, den die conjugirten Durchmesser OF und OH, *Fig.* 50, mit einander einschließen; denn da n und m der Sinus und Cosinus des Winkels FOI, q und p der Sinus und Cosinus des Winkels HOI sind, so muß die Formel

$$\sin FOH = \sin (FOI + HOI)$$
$$= \sin FOI \cos HOI + \cos FOI \sin HOI \ (\S.\ 11)$$

geben

$$\sin FOH = np - mq,$$

wenn man in Erwägung zieht, daß der Winkel HOI, indem er unterhalb der Axe II′ liegt, einen negativen Sinus, $q = -\frac{b^2 mp}{a^2 n}$, haben muß, den man in dieser Fornel positiv zu machen und daher $-q$ statt $+q$ zu nehmen hat; man wird also erhalten

$$a'b' \sin FOH = ab.$$

Es ist leicht einzusehen, daß man, wenn vom Punkt F auf OH die Senkrechte FQ herabgelassen wird, erhalten muß

$$FQ = FO \sin FOH = b' \sin FOH,$$

und daß folglich die Fläche des Parallelogramms

$$FH = \overline{OH} \times \overline{FQ} = a'b' \sin FOH$$

sein werde; man kann also aus dem Vorhergehenden schließen, daß das Rechteck aus den halben Axen a und b oder OI und OL dem aus den beiden Hälften OF und OH der conjugirten Durchmesser gebildeten Parallelogramme gleich ist.

Man überzeugt sich leicht, daß eben diese Eigenschaft bei der

der Hyperbel statt findet, indem man eben so das Produkt $a'^2 b'^2$ bildet; nur muß man in Erwägung ziehen, daß in *Fig.* 51 der Winkel

$$FOH = FOI - HOI$$

ist. Man leitet hieraus die merkwürdige Eigenschaft her, daß die über conjugirten Durchmessern beschriebenen Parallelogramme in der Ellipse so wie in der Hyperbel sämmtlich dem Rechteck aus den beiden Axen gleich sind, weil diese Parallelogramme, wie aus den Figuren zu ersehen ist, aus vier gleichen Parallelogrammen zusammengesetzt sind, deren jedes dem vierten Theil des durch $4a^2b^2$ ausgedrückten Rechtecks der Axen gleich ist *).

§. 148.

Wenn man den Sinus des Winkels FOH mit s bezeichnet, so erhält man die Gleichung

$$a'b's = ab,$$

welche man mit

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$$

in der Ellipse, und mit

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$$

in der Hyperbel vergleichen muß, um die halben Axen a und b zu finden, wenn man nur zwei halbe conjugirte Durchmesser und den von ihnen eingeschlossenen Winkel kennt. Hat man die Axen gefunden, so gelangt man leicht zu den Winkeln, welche sie mit den conjugirten Durchmessern bilden, wenn man sich der in §. 146 für q^2, p^2, n^2 und m^2 beigebrachten Formeln bedient. Diese Ausdrücke geben

*) Für die Ellipse läßt sich dieser Satz auch so ausdrücken: das Parallelogramm, welches die durch die Endpunkte zweier conjugirten Durchmesser gelegten Berührungslinien einschließen, ist von constanter Größe. Auch die Axen sind als zwei conjugirte Durchmesser zu betrachten.

Uebers.

$$\frac{q^2}{p^2} = \frac{b^2(a^2 - a'^2)}{a^2(a'^2 - b^2)}, \quad \frac{n^2}{m^2} = \frac{b^2(a^2 - b'^2)}{a^2(b'^2 - b^2)},$$

und zieht man die Wurzel aus, so hat man die Tangenten der Winkel HOI und FOI.

Eine Bemerkung, die sich hier leicht darbietet und die ich nicht übergehen darf, ist, daß es in jeder Ellipse zwei einander gleiche conjugirte Durchmesser giebt. Wenn man nämlich in den Gleichungen

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2, \quad a'b's = ab,$$

a' und b' gleich setzt, so hat man die Gleichungen

$$a'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad s = \frac{ab}{a'^2} = \frac{2ab}{a^2 + b^2},$$

welche die Größe dieser Durchmesser und den Winkel, den sie einschließen, zu erkennen geben. Die Voraussetzung $a' = b'$ in den Werthen von q^2, p^2, n^2 und m^2 macht den ersten und dritten, so wie den zweiten und vierten, einander gleich; man hat also alles, was nöthig ist, um mit Bezug auf die Axen die Lage dieser Durchmesser zu bestimmen *).

Für zwei einander gleiche conjugirte Durchmesser der Ellipse ist

$$t^2 + u^2 = a'^2.$$

Diese Gleichung ist der des Kreises ähnlich; der einzige Unterschied besteht darin, daß die Coordinaten t und u nicht auf einander senkrecht sind. Man kann daher eine solche Ellipse leicht construiren, wenn man die Ordinaten des Kreises unter dem

*) Man hat $\frac{n}{m} = \frac{q}{p}$ oder tg FOI = tg HOI; die große Axe halbirt also den Winkel, den die beiden gleichen Durchmesser einschließen. Nur in der gleichseitigen Hyperbel giebt es zwei einander gleiche conjugirte Durchmesser; denn da bei der Hyperbel $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$ ist, so kann a' nur dann von gleicher Größe mit b' sein, wenn $a = b$ ist. In dieser Art von Hyperbel sind aber jede zwei conjugirte Durchmesser einander gleich. Der Sinus des jedesmaligen Winkels, den sie einschließen, ist $\frac{a^2}{a'^2}$. Uebers.

Winkel gegen einander neigt, den die in Rede stehenden Durchmesser mit einander bilden. Hieraus ergiebt sich eine leichte Methode, eine Ellipse durch Punkte zu beschreiben, wenn man ihre gleichen conjugirten Durchmesser und den von ihnen eingeschlossenen Winkel kennt *).

Ich überlasse es dem Leser, die Construction der bisher vorgekommenen Ausdrücke zu verrichten. Was ich darüber gesagt habe, scheint mir dem Zweck zu genügen, den ich mir vorgesetzt hatte, nämlich zu zeigen, wie man die vornehmsten Eigenschaften der Linien des zweiten Grades vermittelst einer ganz analytischen Methode unabhängig von den geometrischen Constructionen herleiten könne.

§. 149.

Nicht bloß, wie bisher immer, durch Beziehung auf eine Abscissenaxe vermittelst paralleler Ordinaten lassen sich die Curven durch Gleichungen darstellen; ein jedes System von Linien, welches geeignet ist, die verschiedenen Punkte einer Curve zu bestimmen, kann eine charakteristische Gleichung für sie an die Hand geben.

Als eine solche kann man für die Ellipse die in §. 130 erhaltene Gleichung

---

*) Aus den Gleichungen $a'^2 s = ab$ und $2a'^2 = a^2 + b^2$ folgt, daß jede zwei gleiche Durchmesser unter jedem Winkel gegen einander geneigt die Ellipse geben. Je näher dieser Winkel dem rechten kommt, desto mehr nähert sich die Ellipse dem Kreise. Ueberhaupt wird die Ellipse durch jede zwei unter einem gegebenen Winkel sich schneidenden Durchmesser bestimmt. Die Gleichung $a'^2 t^2 + b'^2 u^2 = a'^2 b'^2$ giebt für jedes u vier Punkte der Ellipse, wenn der Coordinatenwinkel oder der Winkel zwischen den Durchmessern bekannt ist. Auch findet man vermittelst der beiden Gleichungen $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$ und $a'b's = ab$ die Axen, und kennt man diese, so hat man $m^2 = \frac{a^2 (b'^2 - b^2)}{b'^2 (a^2 - b^2)}$, mithin die Lage der Axen, und die Ellipse läßt sich vermittelst der Gleichung $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ construiren. Aehnliche Betrachtungen finden bei der Hyperbel statt.

Uebers.

$$z = \frac{a^2 - cx}{a} = a - \frac{cx}{a}$$

zwischen dem Leitstrahl FM = z, *Fig.* 45, und der Abscisse OP = x betrachten. Man leitet daraus eine sehr einfache Construction dieser Curve her; denn wenn man x beliebig setzt, so erhält man $\frac{cx}{a}$ durch Proportionallinien, und zieht man diese Größe von a ab, so hat man z oder FM, und beschreibt man aus F, als Mittelpunkt, mit dem Halbmesser FM einen Kreisbogen, so wird dieser die Senkrechte PM in dem zur Ellipse gehörigen Punkt M schneiden. Wenn die Abscisse in den Theil OI′ der Axe fiele, so würde man, da x negativ wird, $z = a + \frac{cx}{a}$ erhalten.

Diese Gleichung unterscheidet sich von den vorhergehenden dadurch, daß die Ordinate, statt immer einer und eben derselben Axe parallel zu sein, beständig ihre Richtung ändert, und nur der Bedingung unterworfen ist, daß sie durch einen gegebenen Punkt geht; auch gehört die Gleichung $z = a - \frac{cx}{a}$, obgleich vom ersten Grade, nicht mehr der geraden Linie an, wie in dem Fall, wo ihre Coordinaten festen Axen parallel laufen.

In dem System, welches ich jetzt betrachte, ist es sehr natürlich, den Anfang der Abscissen in den Punkt F zu versetzen, von welchem die neuen Ordinaten oder die Leitstrahlen ausgehen, und dem zufolge OP = x mit FP = x′ zu vertauschen, welches giebt

$$x \text{ oder } OP = OF - FP = c - x',$$

mithin

$$z = a - \frac{c(c - x')}{a} = \frac{a^2 - c^2 + cx'}{a} = \frac{b^2 + cx'}{a},$$

wenn man b^2 statt $a^2 - c^2$ setzt.

Am gewöhnlichsten endlich führt man den Winkel IFM

statt der Abscisse x′ ein, indem man in dem rechtwinkligen Dreieck FMP hat:

FP = FM *cos* PFM oder $x' = -z \cos IFM$ (§. 23); bezeichnet man also den Winkel IFM mit φ, so erhält man

$$z = \frac{b^2 - cz \cos \varphi}{a} \text{ oder } z = \frac{b^2}{a + c \cos \varphi}.$$

Diese letztere Gleichung ist von großem Nutzen in der Anwendung der Analysis auf die Astronomie; man nennt sie Polargleichung, so wie alle diejenigen, deren Ordinaten von einerlei Punkt, den man den Pol der Curve nennt, ausgehen.

Wird die Gleichung $z = \frac{cx - a^2}{a}$, welche sich auf die Hyperbel bezieht (§. 132), ähnlichen Umformungen unterworfen, so erhält man

$$z = \frac{c^2 - a^2 - cx'}{a} = \frac{b^2 - cx'}{a},$$

und

$$z = \frac{b^2 - cz \cos \varphi}{a} \text{ oder } z = \frac{b^2}{a + c \cos \varphi}.$$

In der Parabel hat man, wenn man FM = z setzt, *Fig.* 48, $z = c' + x$, weil FM = QM ist (§. 134). Macht man $FP = x'$, so erhält man

$$x = IF - FP = c' - x'$$

und hieraus

$$z = 2c' - x',$$

$$z = 2c' - z \cos \varphi \text{ oder } z = \frac{2c'}{1 + \cos \varphi}.$$

§. 150.

Die drei Polargleichungen, die hier entwickelt worden sind, können in Eine zusammengestellt werden, wenn man in die beiden ersten statt der zweiten Axe den Parameter einführt, also $\frac{1}{2}ap$ statt b^2 schreibt (§. 137). Da sich durch diese Substitution die Gleichung der Ellipse in

$$z = \frac{\frac{1}{2}ap}{a + c \cos\varphi} = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \frac{c}{a}\cos\varphi}$$

verwandelt, so geht sie in die der Hyperbel über, wenn a negativ und $c > a$ ist *); und in die der Parabel, wenn man $c = a$ und a unendlich setzt, in welchem Fall $p = 4c'$ wird (§. 137).

Setzt man $\frac{c}{a} = e$, so ist, wie man leicht sieht,

$$\tfrac{1}{2}p = a(1 - e^2),$$

mithin

$$z = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos\varphi},$$

eine Formel, welche der Ellipse angehört, wenn $e < 1$; dem Kreise, wenn $e = 0$; der Hyperbel, wenn $e > 1$ und a negativ; der Parabel, wenn $e = 1$ und a unendlich ist. Will man endlich in diese Formel statt a die Entfernung des Scheitels vom Brennpunkt setzen, so hat man $c = a - c'$ (§. 137), also $\frac{c}{a} = e = \frac{a - c'}{a}$. Hieraus folgt $a = \frac{c'}{1 - e}$, und wird dieser Werth in obigem Werth für z substituirt, so erhält man

$$z = \frac{c'(1 + e)}{1 + e \cos\varphi}.$$

§. 151.

Die Haupteigenschaften der Ellipse, der Hyperbel und der Parabel, welche in §. 139 dargethan worden sind, und sowohl in Rücksicht auf die Axen als auf die Durchmesser statt haben **),

---

*) φ muß alsdann für das Supplement von IFM genommen werden. Verf.

**) Von den Durchmessern ist die Eigenschaft im Obigen nicht ausdrücklich bewiesen worden; sie folgt aber aus der vollkommen übereinstimmigen Form der Gleichung für die Axen und conjugirten Durchmesser. Vergl. §. 140 und 141. Uebers.

finden sich in den verschiedenen Curven wieder, welche aus dem Durchschnitt einer conischen Fläche mit irgend einer Ebene entstehen. Hier sind die synthetischen Beweise.

Es sei ASB, *Fig.* 53, irgend ein Kegel von kreisförmiger Grundfläche, d. h. ein Körper, der durch die Fläche begränzt wird, welche entsteht, wenn sich um den Kreis ACBD eine gerade Linie dergestalt bewegt, daß sie in jeder ihrer Lagen durch den Punkt S geht. Zuerst ist offenbar, daß man, wenn durch die Spitze S dieses Kegels eine Ebene CSD gelegt wird, zwei gerade Linien erhalten müsse, welche den beiden Lagen der erzeugenden Geraden entsprechen, die sie in den Punkten C und D annimmt, wo die Ebene CSD den Kreis ACBD trifft. Zweitens, wenn die schneidende Ebene A′C′B′D′ der Grundfläche ACBD parallel ist, so wird der Durchschnitt ein Kreis sein, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man sich durch die Axe SO des Kegels irgend zwei Ebenen ASB, CSD gelegt vorstellt, welche ACBD und A′C′B′D′ in AB und A′B′, CD und C′D′ schneiden; denn man hat alsdann die ähnlichen Dreiecke

$$COS, \quad C'O'S,$$

welche geben

$$CO : C'O' = SO : SO',$$

und die ähnlichen Dreiecke

$$AOS, \quad A'O'S,$$

welche geben

$$AO : A'O' = SO : SO',$$

woraus folgt

$$AO : A'O' = CO : C'O';$$

und da nach der Voraussetzung $AO = CO$ ist, so wird man haben

$$A'O' = C'O',$$

woraus erhellt, daß alle von O′ nach dem Umfange des Schnitts A′C′B′D′ gezogenen Geraden einander gleich sind, der Schnitt mithin ein Kreis ist.

Es muß bemerkt werden, daß sich die Fläche des Kegels sowohl unterhalb der Grundfläche ACBD als oberhalb der Spitze S ins Unendliche erstreckt, weil nichts vorhanden ist, was die Länge der erzeugenden Linie begränzte, und man sieht leicht, daß der Theil Sb der Verlängerung der Geraden SB einen zweiten Kegel beschreibt, welcher in Vergleich mit dem vorigen eine umgekehrte Lage hat.

§. 152.

Dies vorausgesetzt, wollen wir annehmen, der Kegel ASB, *Fig.* 54, werde von einer Ebene geschnitten, die der Grundfläche ACBD nicht mehr parallel ist, sondern ihr nach der Richtung der Geraden GH begegnet. Auf diese Linie fälle ich vom Mittelpunkt aus die Senkrechte OG, durch welche ich das Dreieck ASB lege. Es ist klar, daß, wenn die schneidende Ebene zugleich die beiden Seitenlinien SA und SB des Kegels trifft, mithin nicht in den oberen Kegel aSb übergeht, der Schnitt IMI′m eine geschlossene oder in sich zurückkehrende Curve sein werde.

Ich lege nun parallel mit ACBD zwei Ebenen EMFm und E′M′F′m′, welche zugleich die schneidende Ebene IMI′m treffen. Die Durchschnittslinien Mm und M′m′ der beiden ersten Ebenen mit der dritten werden GH parallel, folglich auf EF und E′F′ senkrecht sein, die ihrerseits der AB parallel sind, als die Durchschnitte der Ebenen EMFm und E′M′F′m′ mit der Ebene ASB. Da nun die Curven EMFm, E′M′F′m′ nach dem vorhergehenden §en Kreislinien sind, so wird man haben

$$\overline{PM}^2 = EP \times FP, \quad \overline{P'M'}^2 = E'P' \times F'P'.$$

Allein die Linie II′, die Durchschnittslinie der Ebenen ASB und IMI′m, bildet mit den Linien EF, E′F′ und den Seitenlinien des Kegels die ähnlichen Dreiecke EIP, E′IP′, und die ebenfalls ähnlichen Dreiecke FI′P, F′I′P′; die beiden ersten geben

$$EP : E'P' = IP : IP',$$

und die beiden andern

$$FP : F'P' = I'P : I'P';$$

multiplicirt man nun diese Proportionen Glied für Glied, so wird man erhalten

$$EP \times FP : E'P' \times F'P' = IP \times I'P : IP' \times I'P',$$

und substituirt man statt $EP \times FP$ und $E'P' \times F'P'$ ihre Werthe $\overline{PM}^2$ und $\overline{P'M'}^2$, so entsteht

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 = IP \times I'P : IP' \times I'P',$$

eine Proportion, welche die in §. 139 aufgestellte charakteristische Eigenschaft der Ellipse ausdrückt.

§. 153.

Es ist noch zu bemerken, daß, wenn das Dreieck SII' dem Dreieck SAB ähnlich wäre, ohne daß die Linie II' parallel zu AB ist, welches statt finden würde, wenn der Winkel SII' dem Winkel SAB, also auch der Winkel SI'I dem Winkel SBA gleich wäre, die Dreiecke EIP und FI'P eben so wie die vorhergehenden einander ähnlich sein und geben würden:

$$EP : I'P = IP : FP \text{ oder } EP \times FP = IP \times I'P;$$

und da man im Kreise EMFm hat

$$\overline{PM}^2 = EP \times FP,$$

so würde man auch haben

$$\overline{PM}^2 = IP \times I'P.$$

Der Schnitt IMI'm wäre also in diesem Fall selbst ein Kreis, wenn die Ordinaten PM auf dem Durchmesser II' senkrecht ständen. Damit aber die letztere Bedingung erfüllt werde, muß der gemeinschaftliche Durchschnitt GH der schneidenden Ebene mit der Grundfläche des Kegels zugleich auf den Geraden GA und GI senkrecht sein, das heißt er muß auf dem durch die Axe gelegten Dreieck SAB senkrecht stehen, folglich muß auch dieses letztere selbst auf der Ebene der Grundfläche des Kegels

und zugleich auf der schneidenden senkrecht sein *). Wenn alle diese Umstände zusammentreffen, so wird die schneidende Ebene eine zur Grundfläche antiparallele genannt, und es folgt hieraus, daß in einem Kegel von kreisförmiger Grundfläche der derselben antiparallele Schnitt, eben so wie der parallele, einen Kreis giebt **).

§. 154.

Wenn die schneidende Ebene in Ansehung der Seiten des Kegels eine Lage hätte, wie sie *Fig.* 55 darstellt, das heißt, daß sie zugleich beide entgegengesetzte Kegel treffen könnte, so würde sie in jedem Kegel eine unbegränzte Curve bilden, weil sie, einmal in den Kegel übergegangen, ihn nicht wieder verlassen würde. Da die beiden entgegengesetzten Kegel eigentlich nur eine einzige Fläche ausmachen, so müssen auch die beiden Curven KIk und K′I′k′ so betrachtet werden, als wenn sie nur eine einzige bildeten. Man wird hierin schon leicht eine Analogie zwischen dieser Curve und der Hyperbel wahrnehmen; um aber ihre Identität darzuthun, muß man in der ersten eine der charakteristischen Eigenschaften der zweiten nachweisen.

Nimmt man an, man habe die Ebene ASB wie in §. 152 bestimmt, die Ebene EMFm der ACBD parallel gelegt und die Geraden II′, Mm und M′m′ gezogen, welche die Durchschnitte der schneidenden Ebene mit den drei Ebenen ASB, EMFm und ACBD sind, so wird man bie beiden Paar ein-

---

*) Die gedachte Lage hat das Dreieck SAB nur dann, wenn es durch den Neigungswinkel der Axe geht, oder wenn SA und SB die größten und kleinsten Seitenlinien des schiefen Kegels sind. Uebers.

**) Wenn I′I und AB parallel wären, so würde SI′I = SAB und SII′ = SBA sein; bei der antiparallelen Lage dagegen ist SI′I = SBA und SII′ = SAB. Leibnitz hat diese im gegenwärtigen Fall bequeme Benennung zuerst gebraucht. *Acta Erud.* 1691, *pag.* 279. Begreiflicherweise kann der antiparallele Schnitt nur im schiefen Kegel vorkommen. Uebers.

ander ähnlichen Dreiecke EIP, AIP′ und FI′P, BI′P′ mit einander vergleichen können, welche geben werden

$$EP : AP' = IP : IP'$$
$$FP : BP' = I'P : I'P';$$

multiplicirt man diese Proportionen Glied für Glied in einander, so erhält man

$$EP \times FP : AP' \times BP' = IP \times I'P : IP' \times I'P'.$$

Da aber die Schnitte EMFm und ACBD Kreise sind, deren Durchmesser EF und AB der Construction gemäß auf Mm und M′m′ senkrecht sind, so wird man haben

$$EP \times FP = \overline{PM}^2, \quad AP' \times BP' = \overline{P'M'}^2,$$

folglich

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 = IP \times I'P : IP' \times I'P',$$

eine Proportion, in welcher die in §. 139 bewiesene charakteristische Eigenschaft der Hyperbel ausgedrückt ist.

§. 155.

Es bleibt noch der Fall übrig, wo die schneidende Ebene, wie in *Fig.* 56, einer der Seiten des Dreiecks ASB parallel ist. Sie kann in diesem Fall nur einen von den beiden entgegengesetzten Kegeln schneiden, allein aus demselben nicht hinausgehen, so daß der Schnitt MIm eine offene und unbegränzte Curve sein wird, wie die Parabel, mit der sie auch wirklich identisch ist.

Wenn nämlich die Ebenen ASB, EMFm, ACBD die oben gedachte Lage haben, so giebt der Parallelismus der Linien IP′ und SB

$$FP = BP';$$

andererseits folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke EIP, AIP′

$$EP : AP' = IP : IP'.$$

Multiplicirt man nun das eine Glied des ersten Verhältnisses durch FP, und das andere durch BP′, so wird man erhalten

$$EP \times FP : AP' \times BP' = IP : IP'.$$

Da man aber in den Kreisen EMFm und ACBD hat

$$\overline{PM}^2 = EP \times FP, \quad \overline{P'M'}^2 = AP' \times BP',$$

so ist

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 = IP : IP',$$

eine Proportion, welche der Ausdruck der in §. 139 aufgestellten charakteristischen Eigenschaft der Parabel ist.

§. 156.

Die Umstände, unter welchen die Linien der zweiten Ordnung ihre Natur ändern, lassen sich auch im Kegel wahrnehmen. In der That, wenn die schneidende Ebene durch die Spitze, aber nicht in den Kegel übergeht, so reducirt sich der Schnitt auf einen Punkt, der dem entspricht, von welchem §. 116 die Rede gewesen ist.

Wenn die schneidende Ebene, immer durch die Spitze gelegt, in den Kegel übergeht, so erhält man zwei gerade Linien, und entfernt man sie dann von der Spitze des Kegels, indem man sie parallel mit sich selbst fortschiebt, so ergiebt sich eine Reihe Hyperbeln, deren Asymptoten die eben gedachten, durch Senkrechte auf diese Ebene projicirten geraden Linien sind (§. 118, 128).

Ist die schneidende Ebene der Seitenlinie des Kegels parallel, so berührt sie, wenn sie zugleich durch die Spitze geht, den Kegel in einer geraden Linie, die man aber als eine doppelte zu betrachten hat, weil sie die Vereinigung der beiden Zweige der Parabel ist, die sich unaufhörlich einander nähern bei der Verengung, welche die Curve erleidet, so wie die schneidende Ebene ihrer Berührung mit dem Kegel immer näher kommt (§. 119, 128).

Je weiter man dagegen die schneidende Ebene von der Spitze des Kegels seiner Seitenlinie parallel entfernt, um so mehr öffnet sich die Parabel in der Gegend ihres Scheitels,

und um so mehr nähern sich mithin ihre Zweige der Senkrechten, die man in diesem Punkt über ihrer Axe errichtet *).

§. 157.

Ich werde nun die Eigenschaften der die Curven vom zweiten Grade schneidenden und berührenden Geraden untersuchen. Um die Methode, die ich oben (§. 105) auf den Kreis angewendet habe, hier weiter zu verfolgen, will ich die Gleichung

$$y - \beta = A(x - \alpha)$$

der Geraden betrachten, die durch einen Punkt geht, dessen Coordinaten α und β sind, und mit der Axe der Abscissen einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente A ist (§. 88). Ich stelle sie mit der Gleichung $y^2 = mx + nx^2$ zusammen, die sich auf die Form $A't'^2 + C'u'^2 - E'u' = 0$ (§. 128)

*) Die Umstände, unter denen die Kegelschnitte (so nennt man gewöhnlich die Linien des zweiten Grades, die hier sämmtlich im Kegel nachgewiesen worden sind) gebildet werden, lassen sich folgendermaßen kurz zusammenfassen. Legt man durch die konische Fläche eines Kegels von kreisförmiger Grundfläche nach der Richtung der Axe einen Schnitt, so erhält man den von zwei Seitenlinien SA und SB, *Fig.* 54, gebildeten Winkel ASB. Durch irgend einen Punkt I' in dem einen Schenkel desselben lege man einen Schnitt I'MI dergestalt, daß dessen Ebene die Grundfläche des Kegels in einer gegen AB senkrecht gerichteten Linie schneidet. Ist nun der Winkel AI'I, den die Durchschnittslinie I'I der Ebenen ASB und I'MI mit der Seitenlinie AS bildet, größer als ASB, so trifft der Schnitt I'MI die Seitenlinie SB diesseits der Spitze und die Figur desselben ist eine Ellipse, die zum Kreis wird, wenn der Schnitt entweder der Grundfläche des Kegels parallel ist, oder zu ihr die antiparallele Lage hat (§. 153). Ist AI'I = ASB, so entsteht die Parabel. Ist endlich AI'I < ASB, so trifft der Schnitt die Linie SB jenseits der Spitze und geht zugleich durch den zweiten Kegel, den sämmtliche über die Spitze hinaus verlängerte Seitenlinien des gegebenen bilden. Die Schnitte in beiden Kegeln zusammengenommen geben dann die Hyperbel, und wenn man dieselbe auf die parallel mit ihr durch die Spitze dls Kegels gelegte Ebene projicirt, so sind die Seitenlinien, in welchen diese Ebene die konische Fläche schneidet, die Asymptoten der Hyperbel. Fällt I' in S, so wird die Ellipse zum Punkt, die Parabel zur geraden Linie, die Hyperbel zu dem Winkel, den die Asymptoten einschließen. Uebers.

(§. 128) bringen läßt, mithin alle drei Curven des zweiten Grades in sich begreift *). Setzt man, wie in §. 105,

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=z,$$

so wird man haben

$$x=\alpha+\frac{z}{\sqrt{1+A^2}},\ y=\beta+\frac{Az}{\sqrt{1+A^2}},$$

und macht man zur Abkürzung $\frac{1}{\sqrt{1+A^2}}=A'$, so wird kommen

$$x=\alpha+A'z,\quad y=\beta+A'Az.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung

$$y^2=mx+nx^2,$$

so erhält man die umgeformte

$$\beta^2+2\beta AA'z+A^2A'^2z^2$$
$$=m\alpha+mA'z+n\alpha^2+2n\alpha A'z+nA'^2z^2.$$

Bringt man alle Glieder auf die eine Seite des Gleichheitszeichens und ordnet sie nach z, so wird man finden

$$(A^2-n)A'^2z^2+2(\beta A-\tfrac{1}{2}m-n\alpha)A'z+\beta^2-m\alpha-n\alpha^2=0,$$

oder

$$z^2+\frac{2(\beta A-\frac{1}{2}m-n\alpha)}{(A^2-n)A'}z+\frac{\beta^2-m\alpha-n\alpha^2}{(A^2-n)A'^2}=0.$$

In dieser Gleichung stellt die Unbekannte z den Abstand EM, *Fig.* 58, des gegebenen Punkts E von einem der Durchschnittspunkte M und M' der vorgelegten Graden EM mit der Curve AC vor; von dem Werthe desselben kann man leicht zu denen der Coordinaten dieses Durchschnitts gelangen.

---

*) Man kann sie auch geradezu mit der Form

$$y^2=px-\frac{px^2}{2a}$$

vergleichen, welche alle drei Curven des zweiten Grades in sich begreift (§. 137), und sieht, daß m den Parameter bezeichnet und n bei der Ellipse den Werth $-\frac{p}{2a}$ hat, der bei der Hyperbel sein Zeichen ändert und bei der Parabel 0 ist. Uebers.

Aus der Beschaffenheit der eben entwickelten Gleichung erhellt, daß eine gerade Linie eine Curve des zweiten Grades in nicht mehr als zwei Punkten schneiden kann.

§. 158.

Schließt man hier eben so, wie beim Kreise (§. 107), so wird man leicht einsehen, daß die beiden Werthe von z einander gleich werden müssen, wenn die vorgelegte Gerade die Curve, wie im Punkt N, nur berührt, weil sich die Punkte M und M′ um so mehr nähern, je näher die Linie EM der EN kommt. Da die Differenz der beiden Werthe von z, welche in der Formel

$$z = -\frac{\beta A - \frac{1}{2}m - n\alpha}{(A^2 - n)A'}$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{\beta A - \frac{1}{2}m - n\alpha}{(A^2 - n)A'}\right)^2 - \frac{\beta^2 - m\alpha - n\alpha^2}{(A^2 - n)A'^2}}$$

begriffen sind, durch

$$2\sqrt{\left(\frac{\beta A - \frac{1}{2}m - na}{(A^2 - n)A'}\right)^2 - \frac{\beta^2 - m\alpha - n\alpha^2}{(A^2 - n)A'^2}}$$

ausgedrückt ist, und immer die Länge der Sehne MM′ darstellt, so wird sie Null, wenn die Punkte M und M′ auf einander fallen; sie giebt folglich für den Berührungspunkt N die Gleichung

$$\left(\frac{\beta A - \frac{1}{2}m - n\alpha}{(A^2 - n)A'}\right)^2 - \frac{\beta^2 - m\alpha - n\alpha^2}{(A^2 - n)A'^2} = 0 \quad (1).$$

Wenn man sie entwickelt, so wird A'^2, als ein allen Gliedern gemeinschaftlicher Theiler, verschwinden, und die hieraus entspringende Gleichung wird A geben, folglich die Lage der Geraden EN bestimmen, welche durch den Punkt E dergestalt gelegt ist, daß sie die Curve AC berüht.

Um nur die einfachsten Fälle zu betrachten, will ich annehmen, der Punkt E liege auf der Axe AP der Abscissen, *Fig.* 59. Es wird dann $\beta = 0$, und man erhält die Gleichung

$$\frac{(\frac{1}{2}m + n\alpha)^2}{(A^2 - n)^2} + \frac{m\alpha + n\alpha^2}{A^2 - n} = 0,$$

welche sich nach der Entwickelung auf

$$\tfrac{1}{4}m^2 + m\alpha A^2 + n\alpha^2 A^2 = 0$$

reducirt und

$$A = \pm \frac{\frac{1}{2}m}{\sqrt{-m\alpha - n\alpha^2}}$$

giebt. Dieser Ausdruck stellt sich unter einer imaginären Form dar; allein er kann vermittelst der besonderen Werthe, welche, die Größen m, n und α erhalten, reell werden, und dies wird überall der Fall sein, wo die Lage des Punkts E und die Natur der Curve gestatten, eine Tangente an diesen Punkt zu legen *).

§. 159.

Es giebt noch einen Fall, in welchem sich die Bedingung der Berührung sehr vereinfacht, nämlich den, wo der gegebene Punkt, indem er auf der Curve selbst liegt, mit dem Berührungspunkt identisch wird. Denn nimmt man an, daß der Punkt E, *Fig.* 58, in M übergeht, so findet zwischen α und β dieselbe Beziehung statt, wie zwischen x und y auf der Curve AC, d. h. man wird haben

$$\beta^2 = m\alpha + n\alpha^2 \quad \text{oder} \quad \beta^2 - m\alpha - n\alpha^2 = 0,$$

wodurch die Gleichung (1) auf folgende gebracht wird:

$$\beta A - \tfrac{1}{2}m - n\alpha = 0,$$

welche giebt

A =

*) Die Gleichung (1), die sich einfacher so darstellen läßt

$$(\beta A - \tfrac{1}{2}m - n\alpha)^2 = (A^2 - n)(\beta^2 - m\alpha - n\alpha^2),$$

löst die Aufgabe: von einem außerhalb einer Curve des zweiten Grades befindlichen Punkt eine Tangente an sie zu legen. Sie giebt die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Berührungslinie mit der Axe der Abscissen bildet. Für den Fall, daß dieser Punkt in der Abscissenaxe selbst liegt, vereinfacht sich die Gleichung in

$$(m\alpha + n\alpha^2)A^2 + \tfrac{1}{4}m^2 = 0.$$

Uebers.

$$A = \frac{\frac{1}{2}m + n\alpha}{\beta}.$$

Dies ist der Ausdruck für die Tangente des Winkels, welchen die Gerade MT mit der Axe der Abscissen machen muß, um die Curve AC zu berühren.

Die Lage dieser Geraden würde auf eine bequemere Weise gegeben sein, wenn man noch einen zweiten Punkt derselben kennte; und der, welcher sich am natürlichsten hiezu darbietet, ist der Punkt T, wo sie die Axe der Abscissen trifft, und für den man in der Gleichung $y - \beta = A(x - \alpha)$ (§. 85) $y = 0$ erhält. Es wird hieraus folgen

$$-\beta = A(x - \alpha) \text{ und } x - \alpha = -\frac{\beta}{A}.$$

Da die Größe $x - \alpha$ der Unterschied der Abscissen der Punkte M und T ist, so bezeichnet sie den Theil PT der Axe AB; setzt man also für A seinen Werth, so wird man haben

$$PT = -\frac{\beta^2}{\frac{1}{2}m + n\alpha}\ ^{*)}.$$

Die Linie PT wird die Subtangente genannt, und wenn sie construirt ist, findet man die Tangente, indem man den Punkt T mit dem Punkt M durch eine gerade Linie verbindet **).

§. 160.

Um den Ausdruck der Subtangente in jeder der Curven vom zweiten Grade insbesondere zu erhalten, braucht man bloß die Gleichungen

---

*) In der Figur ist PT die Summe der Linien AT und AP, weil die Abscisse AT des Punkts T in Rücksicht auf die Abscisse AP des Punkts M negativ ist. Verf.

**) Die Formeln $\frac{\frac{1}{2}m + n\alpha}{\beta}$ und $\frac{\beta^2}{\frac{1}{2}m + n\alpha}$ geben die analytische Auflösung der Aufgabe: durch einen gegebenen Punkt einer Curve des zweiten Grades eine Tangente zu ziehen. Die erste drückt die trigonometrische Tangente des Winkels aus, den die Berührungslinie mit der Axe der Abscissen bildet, die zweite die Subtangente. Uebers.

$$y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2,\quad y^2 = px + \frac{p}{2a}x^2,\quad y^2 = px,$$

nach einander mit $y^2 = mx + nx^2$ zu vergleichen. Erwägt man, so wie oben, daß α und β, indem sie die Coordinaten des auf der Curve liegenden Berührungspunkts ausdrücken, zu einander dieselbe Beziehung haben müssen, wie x und y, und substituirt man daher für β^2 seinen Werth, so findet man aus der ersten zur Ellipse gehörigen Gleichung

$$m = p,\quad n = -\frac{p}{2a},$$

und daher

$$PT = -\frac{2a\beta^2}{p(a-\alpha)} = -\frac{2a\alpha - \alpha^2}{a-\alpha};$$

aus der zweiten zur Hyperbel gehörigen

$$m = p,\quad n = \frac{p}{2a},$$

und daher

$$PT = -\frac{2a\beta^2}{p(a+\alpha)} = -\frac{2a\alpha + \alpha^2}{a+\alpha};$$

aus der dritten zur Parabel gehörigen endlich

$$m = p,\quad n = 0,$$

und daher

$$PT = -\frac{2\beta^2}{p} = -2\alpha.$$

Dieser letzte Ausdruck, der einfachste von allen dreien, zeigt, daß die Subtangente in der Parabel der doppelten Abscisse gleich ist. Das Minuszeichen, womit er, so wie die übrigen, behaftet ist, giebt zu erkennen, daß die Subtangente auf der Axe AB vom Punkt P aus nach der Seite hin, wo die negativen x genommen werden, hingetragen werden muß; da aber die Gestalt der Curve hinlänglich zeigt, auf welche Seite die Subtangente fällt, so werde ich von nun an das Zeichen vor ihrem Ausdruck ganz außer Acht lassen.

Die Construction der beiden ersten Ausdrücke hat keine Schwierigkeit. Man hat für die Ellipse

$$a - \alpha : 2a - \alpha = \alpha : \frac{2a\alpha - \alpha^2}{a - \alpha} = PT,$$

für die Hyperbel

$$a + \alpha : 2a + \alpha = \alpha : \frac{2a\alpha + \alpha^2}{a + \alpha} = PT;$$

es reducirt sich also alles darauf, vierte Proportionallinien zu finden.

Es ist sehr bemerkenswerth, daß die zweite Axe b nicht in diesen Ausdrücken vorkommt; es folgt hieraus, daß für dieselbe Abscisse die Subtangente in allen Ellipsen, welche einerlei große Axe haben, dieselbe bleibt, und daß eben dies auch bei den Hyperbeln statt findet. Da sich die Ellipse in einen Kreis verwandelt, wenn $b = a$ ist, so kann man die Tangente der ersten dieser Curven vermittelbst der Tangenten der zweiten ziehen; denn wenn man die Ordinate pm, *Fig.* 46, verlängert, bis sie den auf der großen Axe beschriebenen Kreis trifft, und die Gerade nT als Tangente dieses letztern im Punkt n zieht, so wird, nach dem Vorhergehenden, die Subtangente pT auch zum Punkt m der Ellipse gehören, dessen Tangente folglich gefunden wird, wenn man die Punkte m und T verbindet. Man würde eine ähnliche Construction für jede beliebige Hyperbel erhalten, wenn man von den Subtangenten der gleichseitigen Hyperbel ausginge (§. 128).

§. 161.

Wenn man die Subtangente hat, so ist es leicht, daraus die Ausdrücke für die **Tangente**, die **Subnormale** und die **Normale** herzuleiten. Dies sind die Namen, welche man den Linien MT, PR und MR, *Fig.* 58, giebt. Die erste ist der Theil der Tangente, welcher zwischen dem Berührungspunkt und der Axe der Abscissen liegt; die zweite der Theil der Axe der Abscissen, welcher zwischen dem Endpunkt P der Ordinate PM

und dem Punkt R liegt, wo eine aus dem Punkt M über der Tangente errichtete Senkrechte diese Axe trifft; die dritte endlich ist diese Senkrechte selbst, vom Punkt M bis zur Axe der Abscissen gerechnet.

1) Aus dem in P rechtwinkligen Dreieck TMP hat man

$$MT = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{PT}^2}$$

2) Die Dreiecke PMT, PMR, welche einander ähnlich sind, weil sie durch die von der Spitze M des rechten Winkels im Dreieck TMR gezogene Senkrechte PM gebildet werden, geben

$$PT : PM = PM : PR \quad \text{und hieraus} \quad PR = \frac{\overline{PM}^2}{PT}.$$

3) Es folgt aus dem in P rechtwinkligen Dreieck MPR

$$MR = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{PR}^2}.$$

Es ist offenbar, daß diese Formeln allen Curven angehören, und daß man, um sie z. B. auf die Ellipse anzuwenden, in die erste und zweite statt PM und PT ihre dieser Curve zukommenden Werthe setzen, und hiernächst vermittelst des Werths, den man für PR und PM erhält, den von MR bilden muß. Auf eben diese Weise muß man mit Hinsicht auf die Hyperbel und Parabel verfahren. Ich beschränke mich darauf, die Ergebnisse dieser Substitutionen herzusetzen, welche keiner Schwierigkeit unterworfen sind. Für die Ellipse sind sie

$$PT = \frac{2a\alpha - \alpha^2}{a - \alpha}, \quad MT = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - \alpha^2) + \left(\frac{2a\alpha - \alpha^2}{a - \alpha}\right)^2}$$

$$PR = \frac{b^2}{a^2}(a - \alpha), \quad MR = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - \alpha^2) + \frac{b^4}{a^4}(a - \alpha)^2},$$

für die Hyperbel

$$PT = \frac{2a\alpha + \alpha^2}{a + \alpha}, \quad MT = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha + \alpha^2) + \left(\frac{2a\alpha + \alpha^2}{a + \alpha}\right)^2}$$

$$PR = \frac{b^2}{a^2}(a + \alpha), \quad MR = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha + \alpha^2) + \frac{b^4}{a^4}(\alpha + \alpha)^2},$$

für die Parabel

$$PT = 2\alpha, \qquad MT = \sqrt{p\alpha + 4\alpha^2}$$

$$PR = \tfrac{1}{2}p, \qquad MR = \sqrt{p\alpha + \tfrac{1}{4}p^2}\ ^{*}).$$

Für die beiden ersten Curven erhält man etwas einfachere Resultate, wenn man die Abscissen vom Mittelpunkt aus rechnet, was bei der dritten nicht angeht, weil sie keinen Mittelpunkt hat (§. 128). Um zu diesen Resultaten zu gelangen, braucht man bloß $\alpha = a - \alpha'$ in der Ellipse und $\alpha = \alpha' - a$ in der Hyperbel zu setzen (§. 137); α' wird dann die neue Abscisse vom Mittelpunkt aus genommen sein. Nachdem diese Substitutionen und die daraus entspringenden Reductionen verrichtet sein werden, wird man finden für die Ellipse

$$PT = \frac{a^2 - \alpha'^2}{\alpha'}, \quad MT = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha'^2) + \left(\frac{a^2 - \alpha'^2}{\alpha'}\right)^2}$$

$$PR = \frac{b^2}{a^2}\alpha' \qquad MR = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha'^2) + \frac{b^4}{a^4}\alpha'^2},$$

und für die Hyperbel

$$PT = \frac{\alpha'^2 - a^2}{\alpha'}, \quad MT = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(\alpha'^2 - a^2) + \left(\frac{\alpha'^2 - a^2}{\alpha'}\right)^2}$$

$$PR = \frac{b^2}{a^2}\alpha' \qquad MR = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(\alpha'^2 - a^2) + \frac{b^4}{a^4}\alpha'^2}.$$

§. 162.

So elegant auch die Methode, welche hier zur Ziehung der Tangenten für die Curven vom zweiten Grade angewandt worden ist, erscheinen mag, so glaube ich doch die synthetischen Auflösungen, welche die Alten von dieser Aufgabe gegeben haben, nicht mit Stillschweigen übergehen zu dürfen, und will sie daher kurz auseinander setzen.

---

*) Für den Kreis ist $MR = \sqrt{2a\alpha - \alpha^2 + (a - \alpha)^2} = a$ und für die gleichseitige Hyperbel $= \sqrt{a^2 + 4a\alpha + 2\alpha^2}$. In der Parabel ist die Subnormale eine constante Linie; sie ist für jeden ihrer Punkte dem halben Parameter oder der doppelten Entfernung des Brennpunkts vom Scheitel gleich. Uebers.

1) Nach dem in der Ellipse, *Fig.* 45, willkürlich angenommenen Punkt M ziehe man die beiden Leitstrahlen FM und F′M; man verlängere den einen, z. B. F′M, um eine Größe MG, welche der FM gleich ist, und ziehe FG, so wird die Gerade MH, welche auf FG senkrecht steht, die Tangente des Punkts M sein *), weil sie nur diesen Punkt mit der Curve gemein hat; und wirklich, wenn man auf dieser Geraden irgend einen anderen Punkt N nimmt und die Geraden FN und F′N zieht, so wird man

$$F'N + NG > F'G$$

haben, oder, was einerlei,

$$F'N + FN > F'M + FM > II',$$

weil nach der Construction MG = MF und NG = NF ist; und da man sich nun leicht überzeugt, daß bei jedem innerhalb der Ellipse liegenden Punkt die Summe seiner Abstände von den beiden Brennpunkten kleiner als die große Axe ist, so folgt, daß der Punkt N außerhalb der Ellipse liegen müsse, weil die Summe dieser Abstände für ihn größer als II′ ist. Diese Construction zeigt zugleich, daß die Winkel FMH und F′MN, welche die Leitstrahlen mit der Tangente bilden, einander gleich sind, und daß die Normale MR den Winkel FMF′ halbirt.

2) Wenn der gegebene Punkt M sich in der Hyperbel, *Fig.* 47, befindet, so muß man den kleineren Leitstrahl FM auf den größeren F′M, und nicht auf dessen Verlängerung tragen; führt man die Construction wie oben aus, so wird man haben

$$F'N < F'G + NG < F'G + FN,$$

woraus folgt

$$F'N - FN < F'G < F'M - FM.$$

Man sieht, daß der Punkt N nicht in der Hyperbel ist; er kann auch nicht innerhalb derselben liegen, weil dann der Unterschied

---

*) In der Ausübung bedarf es bloß der Halbirung des Winkels GMF, den der eine Leitstrahl mit der Verlängerung des andern bildet. Uebers.

seiner Abstände von den Brennpunkten die Zwerchaxe übertreffen müßte; denn zieht man F'm, so hat man

$$F'm - Fm = F'm + Mm - FM,$$

und da $F'm + Mm > F'M$ ist, so folgt

$$F'm - Fm > F'M - FM.$$

Es bleibt mithin nichts weiter übrig, als daß N außerhalb der Curve liegt.

Aus der Construction ergiebt sich auch die Gleichheit der Winkel FMH und F'MH oder RMN.

3) Wenn der Punkt M in der Parabel, *Fig.* 48, befindlich ist, so giebt es nur Einen Leitstrahl; allein der andere wird durch die zur Axe IB parallele QM ersetzt, und der Punkt Q vertritt die Stelle des Punkts G, weil man QM = FM hat. Betrachtet man nun irgend einen Punkt der Linie NH außer M, z. B. N, so hat man zugleich QN und FN > ON; der Punkt muß also außerhalb der Curve liegen.

Aus dieser Construction folgt die Gleichheit der Winkel FMH und QMH, von denen der letztere wieder dem Winkel NME gleich ist, den die Tangente und die der Axe IB parallele Gerade ME mit einander bilden.

Wendete man auf diese Constructionen die Rechnung an, so würde man die im vorigen §en erhaltenen Resultate finden *).

---

*) Um dies an einem Beispiel zu zeigen, sei die Subnormale RP der Ellipse, *Fig.* 45, durch Rechnung zu finden. Da FMR = F'MR, wie sich aus der Construction ergeben hat, so ist nach einem bekannten geometrischen Satz FM : F'M = FR : F'R. Setzt man FM = z, so hat man $z : 2a - z = FR : 2c - FR$, also $2cz - z \cdot FR = (2a - z) FR$, woraus

$$FR = \frac{cz}{a}.$$

Substituirt man für z seinen Werth $\frac{a^2 - cx}{a}$ (§. 130), so ergiebt sich

$$FR = \frac{a^2c - c^2x}{a^2}.$$

Aber $FR = c - OR = c - (x - RP) = c - x + RP$, folglich

§. 163.

Die Betrachtung der Tangenten der Hyperbel führt auf einen sehr merkwürdigen Umstand, aus welchem erhellt, daß, ob sich gleich ihr Lauf ins Unendliche erstreckt, dennoch ein jeder ihrer Zweige zwischen den Schenkeln eines gewissen Winkels eingeschlossen bleibt, ohne sie je erreichen zu können, wie es *Fig.* 57 zeigt. Dieser Umstand, der sich in §. 118 auf eine andere Weise dargestellt hat, giebt sich gleichfalls zu erkennen, wenn man auf den Fortgang der Subtangente PT aufmerksam ist, während der Berührungspunkt M auf der Curve fortrückt und sich vom Punkt I entfernt, oder, was einerlei ist, während die Abcisse OP zunimmt. Bezeichnet man OP mit x, so hat man (§. 161) $PT = \frac{x^2 - a^2}{x}$, und da $OT = OP - PT$, so entsteht

$$OT = x - \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2}{x}.$$

Hieraus erhellt, daß in dem Maaß, wie x wächst, OT abnimmt, der Punkt T sich also dem Punkt O nähert, ohne ihn je erreichen zu können, weil ein Bruch so lange nicht völlig Null werden kann, als sein Zähler noch einen Werth hat. Der Punkt O muß mithin als die Gränze betrachtet werden, der sich der Punkt T mit der wachsenden Abscisse ohne Ende nähert.

Es fragt sich nun, welche Aenderungen der Winkel MTP erleidet, der die Lage der Tangente in Vergleichung mit der Abscissenaxe bestimmt. Die trigonometrische Tangente dieses Winkels hat zum Ausdruck

$$\frac{MP}{PT} = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} \text{ (§. 30)},$$

$$RP = \frac{a^2c - c^2x}{a^2} - c + x = \frac{(a^2 - c^2)x}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}x, \text{ wie oben.}$$

Aus der Subnormale lassen sich dann weiter die Normale, Subtangente und Tangente herleiten. Uebers.

und da sie, wenn man Zähler und Nenner durch x dividirt, die Form $\frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}$ annimmt, so nähert sie sich offenbar der Größe $\frac{b}{a}$ in dem Maaße, als $\frac{a^2}{x^2}$ kleiner oder x größer wird. Es giebt also für den Winkel MTP eine Gränze, nämlich den Winkel EOI, dessen trigonometrische Tangente $\frac{b}{a}$ ist, und man sieht, daß die Hyperbel nie die gerade Linie EO berühren kann, so weit man auch beide verlängern mag.

Um den Winkel EOI zu construiren, muß man auf der Axe II′ eine beliebige Abscisse nehmen, z. B. die halbe Axe OI, und da das rechtwinklige Dreieck EOI

$$EI = OI \; tg \; EOI$$

giebt, so wird man haben

$$EI = OI \times \frac{b}{a} = b,$$

weil OI = a ist. Errichtet man also aus dem Punkt I die Senkrechte EI = b, so wird die Gerade OE, welche die Punkte O und E verbindet, die Gränze aller Tangenten des Zweiges IK der Hyperbel sein. Ich habe bereits gesagt, daß diese Gränze die Asymptote genannt wird *). Es ist offenbar, daß es eine zweite Asymptote Oe unterhalb der Axe II′ geben muß, welche mit dieser Axe denselben Winkel, wie die

*) Man kann sagen, daß die Asymptoten die Tangenten der Hyperbel für Berührungspunkte sind, die unendlich weit von den Scheiteln entfernt liegen. Daß die Gerade, welche O und E verbindet, von der Hyperbel nie erreicht werden könne, erhellt auch so: es ist OI : IE = OP : PR oder a : b = x : PR, also PR = $\frac{b}{a}x$. Aber PM = y = $\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, und da $\sqrt{x^2-a^2}$ immer kleiner als x ist, so wird $\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} < \frac{b}{a}x$ oder PM < PR, wie groß auch x sein mag. Uebers.

erste macht, und als die Gränze der Tangenten des Zweiges Ik dient.

§. 164.

Die Gleichung der Hyperbel wird vereinfacht, wenn man die Asymptoten für die Axen der Coordinaten nimmt. Man ziehe zu dem Ende durch den Punkt M parallel mit der Asymptote Oe eine neue Ordinate QM und setze $QO = t$, $QM = u$. Der von QO, der Axe der t, und von II', der Axe der x, eingeschlossene Winkel EOI hat offenbar zum Cosinus $\frac{OI}{OE}$ und zum Sinus $\frac{IE}{OE}$, und da man

$OI = a$, $IE = b$, $OE = \sqrt{\overline{OI}^2 + \overline{IE}^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

hat, so wird man erhalten (§. 122)

$$m = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad n = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Betrachtet man ferner Oe, die Axe der u, so wird man finden

$$\cos eOI = \frac{OI}{Oe}, \quad \sin eOI = \frac{Ie}{Oe},$$

und da $Oe = OE$, $Ie = -IE$, so wird man haben

$$p = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad q = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

und vermittelst der allgemeinen Formeln

$$x = mt + pu, \quad y = nt + qu$$

wird sich ergeben

$$x = \frac{a(t + u)}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{b(t - u)}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

so wird sie sich nach den nöthigen Reductionen in

$$\frac{4tu}{a^2 + b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad tu = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

verwandeln.

Diese letztere Gleichung, die der am Schluß des §. 120 erhaltenen umgeformten ähnlich ist, setzt die Eigenschaft der Asymptoten ins hellste Licht; denn man zieht daraus

$$u = \frac{\frac{1}{4}(a^2 + b^2)}{t}, \text{ oder } QM = \frac{\frac{1}{4}\overline{OE}^2}{QO},$$

woraus zu ersehen ist, daß die Ordinate QM desto kleiner wird, je mehr sich der Punkt Q vom Mittelpunkt O entfernt, ohne jedoch je Null werden zu können.

Wenn die Hyperbel gleichseitig ist (§. 128), so wird sich die durch $\frac{b}{a}$ ausgedrückte Tangente des Winkels EOI auf 1 reduciren; jede Asymptote bildet alsdann mit der Axe II′ einen Winkel von 0^r,5, beide Asymptoten schließen mithin einen rechten ein. Die Gleichung $tu = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$, welche in diesem Fall $tu = \frac{1}{2}a^2$ wird, zeigt, daß alsdann das Produkt der Coordinaten t und u der Hälfte des Quadrats der halben Zwerchaxe OI gleich ist.

Es ist zu bemerken, daß, wenn man durch den Punkt I die Geraden ID und Id zu Oe und OE parallel zieht, ein Rhombus gebildet wird, dessen Seiten ID und Id mit Bezug auf die Asymptoten die Coordinaten des in der Axe befindlichen Punkts I sein werden; man hat folglich

$$ID \times Id = \overline{ID}^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

woraus man zieht

$$ID = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2},$$

und im Allgemeinen

$$QO \times QM = \overline{ID}^2.$$

Im Fall die Hyperbel gleichseitig ist, wird der Rhombus Dd ein Quadrat, weil der Winkel DOd ein rechter ist.

Das Quadrat $\overline{ID}^2$, welches dem vierten Theil der Summe der Quadrate der beiden halben Axen der Hyperbel gleich ist,

haben die alten Geometer mit dem Namen der Potenz der Hyperbel belegt *).

§. 165.

Es ist offenbar, daß, wenn man PM und PM', die auf die Axe II' sich beziehenden Ordinaten, so weit verlängert, bis sie die Asymptoten OE und Oe erreichen, die zwischen jedem Zweige und der dazu gehörigen Asymptote enthaltenen Theile MR und M'R' einander gleich sein werden. Dieselbe Eigenschaft findet auch bei einer jeden durch irgend einen Punkt der Hyperbel gelegten geraden Linie statt. Wenn man z. B. MN' zieht, so wird man haben GM = G'N', was für eine Lage auch MN' haben mag. Um sich hievon zu überzeugen, ziehe man zuvörderst in Erwägung, daß

$$PR = PR' = \frac{bx}{a},$$

$$MR = PR - PM = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}),$$

$$MR' = PR' + PM = \frac{b}{a}(x + \sqrt{x^2 - a^2}),$$

folglich

$$MR \times MR' = b^2$$

ist. Hierauf ziehe man durch den Punkt N' die Gerade SS' parallel mit MM'. Die ähnlichen Dreiecke RMG und SN'G geben

$$GM : GN' = MR : N'S;$$

ferner die ähnlichen Dreiecke G'N'S' und G'MR'

$$G'M : G'N' = MR' : N'S'.$$

---

*) Bezeichnet man die Potenz der Hyperbel mit q^2, so hat man $u = \frac{q^2}{t}$, woraus man ersieht, daß jede Ordinate QM die dritte Proportionallinie zu der zugehörigen Abscisse OQ und der constanten Linie DI ist. Man sieht, daß es außer dem Asymptotenwinkel nur eines einzigen Punkts der Curve bedarf, um die Potenz der Hyperbel zu finden. Wie man hiernach eine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten construirt, wenn einer ihrer Punkte gegeben ist, fällt in die Augen. Uebers.

Multiplicirt man diese beiden Proportionen Glied für Glied in einander, so erhält man

$$GM \times G'M : GN' \times G'N' = MR \times MR' : N'S \times N'S',$$

und da man nach dem Vorhergehenden

$$MR \times MR' = b^2, \quad N'S \times N'S' = b^2$$

hat, so wird man daraus schließen, daß

$$\overline{GM} \times \overline{G'M} = \overline{GN'} \times \overline{G'N'}$$

sein werde. Setzt man statt G'M und GN' ihre Werthe $G'N' + MN'$, $GM + MN'$, und macht die Reductionen, die sich nach verrichteter Multiplication darbieten, so findet man endlich

$$\overline{GM} \times \overline{MN'} = \overline{G'N'} \times \overline{MN'}, \quad \text{oder} \quad GM = G'N'.$$

§. 166.

Mit Hülfe der eben bewiesenen Eigenschaft kann man auf eine sehr einfache Weise die Hyperbel durch Punkte beschreiben, wenn man die Asymptoten und einen einzigen Punkt M hat. Man zieht durch diesen Punkt eine große Anzahl gerader Linien, wie GG', nimmt den zwischen dem Punkt M und der nächsten Asymptote enthaltenen Theil GM, um ihn von G' nach N' zu tragen, und erhält so einen neuen Punkt N' der gesuchten Curve.

Wenn man die Asymptoten hat, so findet man die Richtung der Axe II', wenn man den von ihnen eingeschlossenen Winkel halbirt, und da die Tangente des Winkels EOI das Verhältniß der halben Axen a und b giebt (§. 163), so ist es leicht, diese Größen zu bestimmen, sobald man einen Punkt der Hyperbel kennt; denn die Gleichung

$$\overline{PM}^2 = \frac{b^2}{a^2}(\overline{OP}^2 - a^2)$$

giebt

$$a^2 = \frac{A^2 \times \overline{OP}^2 - \overline{PM}^2}{A^2},$$

wenn man die Größe $\frac{b}{a}$ durch A bezeichnet.

§. 167.

Außer der Hyperbel, deren Zweige KIk und K'I'k' sind, schließen die Linien OS und OS' noch eine andere Hyperbel HLh und H'L'h' ein, welche in den beiden andern Winkeln, die diese Geraden bilden, dergestalt beschrieben ist, daß die Zwerchaxe II' der einen die zweite Axe der andern ist, welche letztere zur Zwerchaxe LL' die zweite Axe der ersten hat. Die Beziehung, welche diese Curven zu einander haben, hat veranlaßt, sie **conjugirte Hyperbeln** zu nennen; sie haben einerlei **Potenz**, folglich einerlei Gleichung zwischen den Asymptoten; nur der Asymptoten- oder Coordinatenwinkel ist bei der einen Curve das Supplement dessen, was er bei der andern ist *).

§. 168.

Man hat sich oben (§. 94) aus der Form der Gleichung des Kreises überzeugt, daß drei Punkte erforderlich sind, um ihn zu bestimmen. Dieselbe Betrachtung läßt sich auf jede andere Curve anwenden, und es ist offenbar, daß im Allgemeinen so viele Punkte erfordert werden, als die Gleichung der verlangten Curve nothwendige Coefficienten enthält. Die allgemeine Gleichung der Curven zweiter Ordnung

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F$$

enthält, unter der Form

$$y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = f$$

angesetzt, nur die fünf Coefficienten b, c, d, e, f; es werden daher fünf Punkte hinreichen, um die Curve vom zweiten Grade, welche sie darstellt, zu bestimmen; und wirklich wird man, wenn die zusammengehörigen Coordinaten

---

*) Die beiden conjugirten Hyperbeln haben $\frac{1}{4}(a^2 + b^2) = q^2$ mit einander gemein. Es muß also, wenn die zu einerlei Abscisse t für beide Hyperbeln gehörigen Ordinaten mit u und u' bezeichnet werden, $u = \frac{q^2}{t} = u'$ sein, so daß alle zwischen den beiden conjugirten Hyperbeln parallel mit der einen Asymptote gezogenen Linien von der andern halbirt werden. Uebers.

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}\alpha'\\\beta'\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}\alpha''\\\beta''\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}\alpha'''\\\beta'''\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}\alpha''''\\\beta''''\end{matrix}\right\}$$

sind, folgende fünf Gleichungen bilden:

$$\begin{aligned}
\beta^2 &+ b\alpha\beta + c\alpha^2 + d\beta + e\alpha = f\\
\beta'^2 &+ b\alpha'\beta' + c\alpha'^2 + d\beta' + e\alpha' = f\\
\beta''^2 &+ b\alpha''\beta'' + c\alpha''^2 + d\beta'' + e\alpha'' = f\\
\beta'''^2 &+ b\alpha'''\beta''' + c\alpha'''^2 + d\beta''' + e\alpha''' = f\\
\beta''''^2 &+ b\alpha''''\beta'''' + c\alpha''''^2 + d\beta'''' + e\alpha'''' = f.
\end{aligned}$$

Da ich nur zum Zweck habe, die Möglichkeit der Bestimmung der Buchstaben b, c, d, e, f und die Anzahl der dazu nöthigen Bedingungen zu zeigen, so will ich mich nicht dabei aufhalten, die Rechnungen auszuführen, die diese Operation erfordern würde. Man kann zu diesem Ende das S. 171 citirte Werk des Hrn. Puissant vergleichen, worin man über diesen Gegenstand und dessen Anwendungen die wichtigsten Erörterungen findet. Ich will mich auf die Bemerkung einschränken, daß diese Gleichungen in gewissen Fällen widersprechend werden können. Wenn sich z. B. drei der gegebenen Punkte in gerader Linie befänden, so würde es nicht möglich sein, durch sie eine Curve vom zweiten Grade zu legen, weil keine Curve dieses Grades mehr als zwei Punkte mit einer geraden Linie gemein haben kann (§. 157).

Man sieht leicht ein, daß, wenn die Curve der Gattung und Lage nach gegeben ist, weniger Bedingungen zu ihrer Bestimmung erfordert werden. Wenn man z. B. eine Ellipse vollends bestimmen will, deren Mittelpunkt und große Axe der Lage nach gegeben sind, so wird man nur zwei Punkte nöthig haben; denn man kann dann diesen Mittelpunkt für den Anfangspunkt der Coordinaten und die große Axe für die Abscissenlinie nehmen, und die Gleichung $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, die sich auf diesen Fall bezieht, enthält nur zwei Coefficienten a, b, welche sich durch die Gleichungen

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = a^2b^2,$$
$$a^2\beta'^2 + b^2\alpha'^2 = a^2b^2$$

ergeben *).

§. 169.

Ich habe §. 73 gezeigt, daß die Gleichung des zweiten Grades vermittelst einer Kreislinie und einer Geraden construirt werden kann, und §. 105, daß die beiden Wurzeln durch die beiden Punkte, worin sich diese Linien schneiden können, gegeben sind, so daß man die vorgelegte Gleichung als das Resultat der Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen mit zwei Unbestimmten betrachten kann, von denen die eine zur Geraden und die andere zum Kreise gehört. Wenn man diesen Gesichtspunkt erweitert, so wird man ein Mittel haben, die Gleichungen von jedem beliebigen Grade zu construiren **).

Hat

---

*) Man erhält

$$a = \pm\sqrt{\frac{\alpha'^2\beta^2 - \alpha^2\beta'^2}{\beta^2 - \beta'^2}},$$
$$b = \pm\sqrt{\frac{\alpha'^2\beta^2 - \alpha^2\beta'^2}{\alpha'^2 - \alpha^2}}.$$

Zur Bestimmung der Parabel, von welcher Scheitel und Richtung der Axe gegeben sind, bedarf es nur Eines Punkts. Eben so zur Construction einer Hyperbel, deren Asymtotenwinkel gegeben ist. Uebers.

**) Es kommt darauf an, den Geist dieser Methode recht klar aufzufassen. Ich bemerke darüber Folgendes. Sind zwei Gleichungen A und B mit zwei unbestimmten x und y gegeben, so leitet man daraus durch Substitution eine dritte Gleichung C mit einer Unbekannten x her. Sieht man die x und y, die hierbei in beiden Gleichungen für identisch gelten, als rechtwinkliche Coordinaten an, so sind die Wurzeln von C die Abscissen der Punkte, in denen sich die durch A und B bestimmten Linien schneiden, weil sie in diesen Punkten einerlei Coordinaten haben. Ist umgekehrt eine Gleichung C mit einer Unbekannten gegeben, so muß man, um ihre Wurzeln zu construiren, zwei Gleichungen A und B zwischen zwei Unbestimmten x und y suchen, aus denen durch Substitution die C entsteht. Da es unendlich viele Paare solcher Gleichungen giebt, so setzt man die eine A willkührlich, möglichst einfach, an, und leitet durch Combination derselben mit C die zweite B her, indem man den Werth von x aus A dergestalt in

Hat man z. B. die Gleichung

$$x^4 - b^2x^2 + c^3x - d^4 = 0,$$

welche jede Gleichung des vierten Grades, woraus man das zweite Glied weggeschafft hat, darstellen kann, so ist es erlaubt, sie so zu betrachten, als sei sie durch die Elimination einer Unbekannten y aus zwei Gleichungen vom zweiten Grade entstanden, welche zugleich x und y enthalten, folglich zu zwei Curven gehören. Diese Gleichungen zu finden, ist eine unbestimmte Aufgabe, weil es eine unendliche Menge Systeme von Gleichungen giebt, welche zur vorgelegten führen können; man wählt daher die eine willkürlich. Es sei $x^2 = py$, so wird man haben

$$x^4 = p^2y^2,$$

und setzt man die Werthe von x^4 und x^2 in die vorgelegte Gleichung, so erhält man

$$p^2y^2 - b^2py + c^3x - d^4 = 0$$

oder

$$y^2 - \frac{b^2}{p}y + \frac{c^3}{p^2}x - \frac{d^4}{p^2} = 0.$$

Es ist leicht einzusehen, daß diese Gleichung einer Parabel angehört (§. 128), und um sie unter der einfachsten Form darzustellen, genügt es, das mit y behaftete Glied wegzuschaffen, was

---

C substituirt, daß daraus eine Gleichung mit zwei Unbestimmten entsteht. Construirt man dann die Linien, welche durch A und B dargestellt worden, so sind die Abscissen der Durchschnittspunkte beider die Wurzeln von C. Die Zahl der Durchschnitte bestimmt die der reellen Wurzeln, so daß, wenn gar keine Durchschnitte statt finden, auch keine mögliche Wurzeln vorhanden sind. Die Construction der Gleichungen des zweiten Grades läßt sich durch die gerade Linie und irgend einen Kegelschnitt bewerkstelligen, wozu man, wie in §. 73, den Kreis wählen kann. Die Gleichungen des dritten und vierten Grades lassen sich durch zwei Kegelschnitte, am einfachsten durch zwei Parabeln construiren. Um noch höhere Gleichungen zu construiren, müßte man die Curven der höheren Grade zu Hülfe nehmen. Uebers.

geschieht, wenn man $y = y' + \frac{b^2}{2p}$ setzt. Nach dieser Substitution wird man haben

$$y'^2 + \frac{c^3}{p^2} x - \frac{b^4 + 4d^4}{4p^2} = 0,$$

welches Resultat folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$y'^2 = \frac{c^3}{p^2}\left(\frac{b^4 + 4d^4}{4c^3} - x\right)$$

und zu erkennen giebt, daß die Parabel, der es entspricht, die Größe $\frac{c^3}{p^2}$ zum Parameter hat, und daß die Abscisse ihres zu $y' = 0$ gehörigen Scheitels $\frac{b^4 + 4d^4}{4c^3}$ ist. Wenn man also senkrecht gegen die Axe AB der Abscissen, *Fig.* 60, an der Seite der positiven Ordinaten einen Abstand $AA' = \frac{b^2}{2p}$ nimmt, so wird die zu AB parallel gelegte A'B' die Axe sein, von welcher aus die y' genommen werden müssen. Man macht dann

$$AD = \frac{b^4 + 4d^4}{4c^3},$$

und errichtet man nun DI senkrecht über AB, so wird der Punkt I der Scheitel der zweiten Parabel GIH sein, von welcher IA' die Axe ist; und da man ihren Parameter kennt, so ist nichts leichter, als sie nach §. 135 durch Punkte zu construiren. Was die erste durch die Gleichung $x^2 = py$ gegebene Parabel EAF betrifft, so hat sie offenbar ihren Scheitel im Anfangspunkt der Coordinaten A und AC zur Axe der y. Nachdem sie construirt ist, werden die Abscissen der Punkte M, M', M'', M''', in denen sie der andern Parabel begegnet, die Wurzeln der vorgelegten Gleichung geben, weil die Werthe von x in diesen Punkten zugleich den beiden Gleichungen

$$x^2 = py,$$

$$p^2y^2 - b^2py + c^3x - d^4 = 0,$$

aus welchen die vorgelegte entsteht, ein Genüge leisten.

Die Größe p, welche durch die Gleichung der ersten Parabel eingeführt wird, kann, da sie unbestimmt bleibt, zur Vereinfachung der Construction jeden Werth annehmen, den man ihr beilegen mag, Null ausgenommen.

Um den allgemeinsten Fall darzustellen, habe ich die Gleichung so gewählt, daß die beiden Curven sich in vier Punkten schnitten. Dieser Umstand kann aber nur in so fern statt finden, als alle Wurzeln der vorgelegten Gleichung reell sind. Wenn z. B. die Axe A'I der Parabel GIH unterhalb AB fiele, welches geschehen würde, wenn das Glied b^2py das Zeichen + hätte, weil man alsdann $y = y' - \frac{b^2}{2p}$ setzen müßte, so würde es höchstens zwei Durchschnittspunkte geben, weil offenbar der Zweig IH die Parabel EAF nicht mehr treffen würde. Die Curve GIH wird sich sogar unter gewissen Umständen gänzlich unterhalb EAF befinden, und dann werden die Wurzeln der vorgelegten Gleichung imaginär sein.

Man ersieht übrigens aus dieser Construction, so wie aus der Theorie der Gleichungen, daß die vom vierten Grade nur eine gerade Anzahl reeller Wurzeln haben können, weil sich die beiden Parabeln EAF und GIH offenbar nur entweder in zwei oder in vier Punkten schneiden.

§. 170.

Auch folgt hieraus, daß der Kreis und die gerade Linie, indem sie sich nur in zwei Punkten schneiden, nur solche Aufgaben auflösen können, welche sich auf Gleichungen vom zweiten Grade bringen lassen, und daß sie folglich nicht zur Auflösung derjenigen hinreichend sind, welche diesen Grad übersteigen, z. B. die im Alterthum so berühmten Aufgaben von der **Verdoppelung des Würfels** und der **Dreitheilung des Winkels**.

Bei der ersten kommt es darauf an, die Seite eines Würfels zu finden, dessen Volumen doppelt so groß ist, als das

eines gegebenen Würfels. Wenn a die Seite des letzteren und x die des ersteren ist, so hat man folgende Gleichung:

$$x^3 = 2a^3 \quad \text{oder} \quad x^3 - 2a^3 = 0.$$

Um sie mit der obigen zusammenzustellen, muß man sie auf den vierten Grad bringen, indem man sie durch x multiplicirt, und man wird haben

$$x^4 - 2a^3x = 0;$$

vergleicht man sie nun mit $x^4 - b^2x^2 + c^3x - d^4 = 0$, so wird sich ergeben

$$b = 0, \quad c^3 = -2a^3, \quad d = 0.$$

Die Gleichungen der zu construirenden Parabeln werden demnach sein

$$x^2 = py, \quad y^2 = \frac{2a^3}{p^2}x,$$

und nimmt man $p = a$, so werden sie sich in folgende verwandeln:

$$x^2 = ay, \quad y^2 = 2ax,$$

so daß also der Parameter der zweiten Curve doppelt so groß ist, als der der ersten. Diese Curven werden beide durch den Anfangspunkt gehen, *Fig.* 61, weil in beiden zugleich $x = 0$ und $y = 0$ ist; sie werden sich in diesem Punkt schneiden, und dieser Durchschnitt wird $x = 0$ geben, eine Wurzel, welche von dem Faktor herrührt, den man eingeführt hat, um die zu construirende Gleichung auf den vierten Grad zu bringen. Die Figur zeigt, daß man nur noch eine einzige reelle Wurzel AP erhalten kann, und wirklich lehrt die Algebra, daß die Gleichung $x^3 - 2a^3 = 0$ nicht mehr als eine einzige haben kann *).

---

*) Nach dieser Methode kommt es also bei der Auflösung der Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels darauf an, zwei Parabeln zu construiren, wovon die eine EAF, *Fig.* 61, die einfache und die andere GAH die doppelte Seite des gegebenen Würfels zum Parameter hat. Es ist dann AP, die Abscisse des Durchschnittspunkts M, die Seite des doppelten Würfels, indem sich bei Voraussetzung gleicher Werthe von y in den Gleichungen $x^2 = ay$ und $y^2 = 2ay$ für x^3 der Werth $2a^3$

§. 171.

Die Aufgabe von der **Dreitheilung des Winkels** hat zum Zweck, einen Winkel oder Bogen in drei gleiche Theile zu theilen, was sich leicht verrichten ließe, wenn man aus der Sehne oder dem Sinus eines Bogens die Sehne oder den Sinus seines dritten Theils erhalten könnte. Diese Aufgabe ist nur ein besonderer Fall von der Theorie der Vieltheilung der Winkel, die ich hier nicht auseinander setzen kann, deren Grundzüge man aber in der Einleitung zu meinem Lehrbegriff der Differential- und Integralrechnung entwickelt findet. Sie kann in eine Gleichung gebracht werden vermittelst der Formeln des 11ten §en, welche geben

$$\cos 3\,A = \frac{4 \cos A^3 - 3\,R^2 \cos A}{R^2} \text{ *)}.$$

---

findet. Aus dieser Gleichung folgt $x = a\sqrt[3]{2}$. Da nun $a\sqrt[3]{2}$ die erste der beiden mittleren Proportionallinien zwischen a und 2 a ist, so sieht man, daß sich die Aufgabe, den Würfel zu verdoppeln, eigentlich auf folgende reducirt: zwischen zwei gegebenen Linien zwei mittlere Proportionallinien zu finden. Man hat diese Aufgabe im Alterthum so wie in neueren Zeiten auf mannigfache Weise zu lösen versucht, weshalb ich auf das gelehrte Werk des Hrn. Reimer *De cubi duplicatione sive de inveniendis duabus mediis continuo proportionalibus inter duas datas* (Göttingen 1798, 8.) verweise. Ich bemerke nur noch, daß dieses Problem gewöhnlich das Delische genannt wird, weil nach einem Schreiben des Eratosthenes an Ptolemäus Euergetes, das uns Eutocius aufbewahrt hat, das Orakel zu Delos bei Gelegenheit einer Pest befohlen haben soll, den Altar des Apollo, der ein Würfel war, ohne Veränderung seiner Gestalt zu verdoppeln, weshalb man sich an Plato wendete. Aber schon früher hatte sich Hippokrates aus Chios, der durch den Satz von den Monden bekannt ist, mit dieser Aufgabe beschäftigt. Uebers.

*) Diese Formel folgt sogleich aus der in §. 11 gegebenen

$$\cos 3\,A = \frac{\cos A \cos 2\,A - \sin A \sin 2\,A}{R},$$

wenn man für $\cos 2A$ und $\sin 2A$ ihre Werthe $\frac{\cos A^2 - \sin A^2}{R}$ und $\frac{2 \sin A \cos A}{R}$ setzt und $R^2 - \cos A^2$ für $\sin A^2$ schreibt. Uebers.

Betrachtet man nun *cos* 3 A als gegeben und nimmt *cos* A für die Unbekannte, so wird man, wenn man *cos* 3 A = a und *cos* A = x setzt, die Gleichung erhalten:

$$x^3 - \tfrac{3}{4}R^2x - \tfrac{1}{4}R^2a = 0,$$

welche, wenn man sie mit x multiplicirt und mit der Gleichung

$$x^4 - b^2x^2 + c^3x - d^4 = 0$$

vergleicht,

$$b^2 = \tfrac{3}{4}R^2, \quad c^3 = -\tfrac{1}{4}R^2a, \quad d^4 = 0$$

geben wird.

Man wird auch hier einen Durchschnitt im Punkt A erhalten, welcher mit der Wurzel x = 0 correspondirt, und die drei anderen Durchschnittspunkte werden die drei Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - \tfrac{3}{4}R^2x - \tfrac{1}{4}R^2a = 0$$

geben.

Auf den ersten Blick scheint es, daß man nur eine reelle Wurzel erhalten, folglich nur auf eine einzige Art einen Bogen in drei gleiche Theile theilen könne. Wenn man aber über die Sache aufmerksam nachdenkt, so sieht man, daß es drei Bogen giebt, welche der vorgelegten Aufgabe genügen müssen; denn die Bogen 3 A, $2\pi + 3$ A, $4\pi + 3$ A, welche einerlei Cosinus haben (§. 23), geben, durch 3 dividirt, die Werthe

$$x = \cos A, \quad x = \cos(\tfrac{2}{3}\pi + A), \quad x = \cos(\tfrac{4}{3}\pi + A),$$

welche wesentlich verschieden sind *). Mehr als diese drei kann man nicht erhalten, da die Bogen $6\pi + 3$ A, $8\pi + 3$ A . . ., welche gleichfalls einerlei Cosinus mit 3 A haben, durch 3 dividirt, auf die Bogen $2\pi +$ A,

*) Obige Gleichung gehört auch wirklich für den irreducibeln Fall, worüber man mein *Complément des Élémens d'Algèbre* nachsehen kann. Verf. — Unter dem *casus irreducibilis* versteht man den Fall, wo in der auf die Form $x^3 + px + q = 0$ gebrachten kubischen Gleichung p negativ und zugleich $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$ ist, weil dann die Cardanische Formel unter einer unmöglichen Form erscheint. Uebers.

$2\pi + \frac{2}{3}\pi + A$ . . . führen und $\cos(2\pi + A) = \cos A$, $\cos(2\pi + \frac{2}{3}\pi + A) = \cos(\frac{2}{3}\pi + A)$ . . . ist,

§. 172.

Ehe die Approximationsmethoden den Grad von Vollkommenheit erlangt hatten, auf den sie gegenwärtig gebracht sind, beschäftigten sich die Geometer viel mit der Construction der Gleichungen, und boten alle ihre Kräfte auf, dieselbe durch die einfachsten und am leichtesten zu beschreibenden Curven zu bewerkstelligen. So gab Halley eine Methode, die Gleichungen vom dritten und vierten Grade vermittelst des Kreises und der Parabel zu construiren, und diese Methode hat vor der in §. 169 gegebenen darin einigen Vorzug, daß der Kreis, welcher die Stelle der einen Parabel vertritt, sich leicht durch eine stetige Bewegung beschreiben läßt; allein der seltene Gebrauch, den man jetzt von Constructionen macht, überhebt mich einer genaueren Auseinandersetzung derselben; ich werde daher hier nur ihren Geist andeuten.

Ich setze die Gleichung der Parabel unter der Form $x^2 = my$, und die allgemeine Gleichung des Kreises unter der Form

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \quad (§. 94)$$

an. Entwickelt man die letztere und schafft y fort vermittelst seines Werths $\frac{x^2}{m}$, den man aus der ersten zieht, so erhält man die Gleichung

$$x^4 - m(2q - m)x^2 - 2m^2px - (r^2 - p^2 - q^2)m^2 = 0,$$

welche der zu construirenden

$$x^4 - b^2x^2 + c^3x - d^4 = 0$$

ähnlich ist, und man hat zur Bestimmung der vier unbekannten Größen m, p, q und r die drei Gleichungen

$$b^2 = m(2q - m),$$
$$c^3 = -2m^2p,$$
$$d^4 = (r^2 - p^2 - q^2)m^2.$$

Es kann daher die eine dieser Größen willkürlich gesetzt werden. Macht man z. B. m = b, so ergiebt sich

$$q = b,\ p = -\frac{c^3}{2b^2},\ r^2 = \frac{d^4}{b^2} + p^2 + q^2,$$

welche Werthe sich leicht construiren lassen und die Lage des Mittelpunkts und den Halbmesser des Kreises geben, der in Verbindung mit der durch die Gleichung $x^2 = by$ bestimmten Parabel zu beschreiben ist. Ich will nicht in die Erörterung der Fälle eingehen, welche eine andere Wahl des der einen unbekannten beizulegenden Werths erfordern möchten, und dieses Lehrbuch mit der Entwickelung einer Methode schließen, welche mit dem Vortheil ihrer Anwendbarkeit auf die Gleichungen eines jeden Grades den verbindet, daß sie die Resultate, die man auf analytischem Wege vermittelst der Theorie der Zusammensetzung der Gleichungen erhält, dem Auge gleichsam vormalt.

§. 173.

Um die Ideen zu fixiren, nehme ich an, die zu construirende Gleichung sei bloß $a + bx + cx^2 + dx^3 = 0$, und ich setze

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Da man in den Punkten, in welchen die durch die letztere Gleichung ausgedrückte Curve die Axe der Abscissen schneidet, $y = 0$ hat, so folgt, daß die Abscissen dieser Punkte die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sein werden. Die Aufgabe reducirt sich also darauf, diese Curve zu construiren, und dies kann leicht geschehen, nachdem man die Gleichung derselben dadurch homogen gemacht hat, daß man in sie die Potenzen der Einheit einführt (§. 71). Man wird so erhalten

$$y = a + \frac{bx}{n} + \frac{cx^2}{n^2} + \frac{dx^3}{n^3},$$

ein Resultat, worin sich jedes einzelne Glied durch Proportionallinien construiren läßt. Wir wollen indessen hier ein Mittel an-

geben, diese verschiedenen Operationen mit einander zu combiniren.

Es sei, *Fig.* 63, AB die Axe der Abscissen. In dem Anfangspunkt A errichte man über dieser Axe die Gerade AC senkrecht, welche die Axe der y sein wird, und nachdem man auf der ersten AD = n genommen und DE parallel zu AC gezogen hat, trage man auf diese letztere Linie die Theile

$$AF = a, \quad FG = b, \quad GH = c, \quad HI = d.$$

Man ziehe dann IK parallel zu AB, verbinde die Punkte H und K durch eine gerade Linie, welche die auf der Abscisse AP = x errichtete Senkrechte PR in L schneiden wird, und ziehe ML parallel zu AB, um auf DE den Punkt M zu bestimmen, den man mit G zu verbinden hat. Durch den Punkt N, in welchem MG die PR schneidet, ziehe man ferner ON parallel zu AB, und wenn man die Punkte O und F verbindet, so wird die Gerade OF auf PR einen Punkt Q geben, in welchem PQ = y sein wird.

Man hat nämlich durch die ähnlichen Dreiecke IKH und H'LH folgende Proportion

$$IK(n) : H'L(x) = HI(d) : HH' = \frac{dx}{n},$$

woraus folgt

$$GH' = GH + HH' = c + \frac{dx}{n}.$$

Ferner aus den Dreiecken H'MG und G'NG ergiebt sich

$$H'M(n) : G'N(x) = GH'\left(c + \frac{dx}{n}\right) : GG' = \frac{cx}{n} + \frac{dx^2}{n^2},$$

folglich

$$FG' = FG + GG' = b + \frac{cx}{n} + \frac{dx^2}{n^2}.$$

Endlich folgt aus den Dreiecken G'OF und F'QF

$$G'O(n) : F'Q(x)$$

$$= FG'\left(b + \frac{cx}{n} + \frac{dx^2}{n^2}\right) : FF' = \frac{bx}{n} + \frac{cx^2}{n^2} + \frac{dx^3}{n^3},$$

woraus sich als letztes Resultat ergiebt

$$PQ = AF' = AF + FF' = a + \frac{bx}{n} + \frac{cx^2}{n^2} + \frac{dx^3}{n^3}.$$

Man wird dies Verfahren leicht auf jede beliebige Anzahl von Gliedern ausdehnen, welche die Gleichung haben mag *), und wenn man eine hinlängliche Menge den Lauf der Curve bezeichnender Punkte gefunden haben wird, so sieht man leicht, wie vieler reellen Wurzeln die Gleichung fähig ist.

§. 174.

Wenn der Lauf der Curve von der Art ist, wie ihn die Linie XEGILY, *Fig.* 62, darstellt, so wird sie die Axe der Abscissen fünfmal schneiden und folglich anzeigen, daß die Gleichung, aus der sie entsprungen ist, eine gleiche Anzahl reeller Wurzeln hat. Diese Gleichung kann von keinem niedrigeren Grade als vom fünften sein. Die vorgelegte Gleichung wird also

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots = 0$$

und die der zu construirenden Curve

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots$$

sein.

Es ist offenbar, daß die Zahlenwerthe der Ordinate y nichts anderes als die Resultate sind, welche man aus der vorgelegten Gleichung erhält, wenn man der x die den verschiedenen willkürlich gewählten Abscissen correspondirenden Werthe giebt. Die Curve XEGILY vertritt also gewissermaßen die Stelle eines Verzeichnisses dieser numerischen Resultate, nur mit dem Vorzug, daß vermöge des Gesetzes der Stetigkeit, welches man an den Linien besser als an den Zahlen wahrnimmt, die Intervalle zwischen zwei auf einander folgenden Sustitutionen sich mit größ-

*) Bequemer und sicherer findet man für jeden angenommenen Werth der Abscisse x den zugehörigen Werth der Ordinate y durch Rechnung, wo man dann beide für eine beliebig gewählte linearische Einheit aufzutragen hat. Uebers.

ten Leichtigkeit ausfüllen lassen. Nachdem man z. B. die einander sehr nahe liegenden Ordinaten P′P, Q′Q, R′R berechnet und ihre Endpunkte mit möglichster Beobachtung der allmäligen Krümmung durch einen freien Zug verbundeu hat, so hat man ziemlich genau die zwischenliegenden Ordinaten.

Man muß bemerken, 1) daß, da die Gleichung der Curve nur ganze und positive Potenzen von x enthält, jeder Werth dieser Unbestimmten nur einen einzigen für y geben kann, welcher endlich und begränzt sein wird, so lange es der von x ist, daß aber y einer unbegränzten Zunahme fähig ist, wenn x dergleichen erhält, und daß sich folglich die Curve XEGILY an jeder Seite der Axe AC der y ins Unendliche erstrecken muß.

2) Der bloße Anblick der Figur zeigt, daß die Curve XEGILY nicht von einer Seite der Axe AB auf die andere übergehen kann, ohne diese Axe zu schneiden, oder analytisch zu reden, daß die Ordinate y nicht ihre Zeichen ändern kann, ohne durch Null zu gehen*), woraus folgt, daß, **wenn zwei in der vorgelegten Gleichung gemachte Substitutionen zwei Resultate mit entgegengesetzten Zeichen geben, zwischen den beiden dabei gebrauchten Werthen von x nothwendig eine reelle Wurzel liegen muß.**

3) Wenn man in derselben Curve zwei auf einerlei Seite der Axe AB liegende Punkte nimmt, so wird immer zwischen ihnen eine gerade Anzahl Durchschnitte der Curve mit der Axe liegen. So liegen zwei zwischen E und I, vier zwischen E und Y oder zwischen X und L; oder es giebt gar keinen, wie dies zwischen P und I der Fall ist. Im Gegentheil wird man im-

---

*) Dies ist in dem vorliegenden Fall richtig, weil der Ausdruck für y keinen Nenner mit x hat. Hätte man aber $y = \frac{a}{x}$, so würde die Folge der Werthe $x = + 1$, $x = 0$, $x = - 1$ geben: $y = + a$, $y = \frac{x}{0}$ oder unendlich und $y = - a$. Auf diese Weise stehen die Zweige der zwischen ihren Asymptoten betrachteten Hyperbel mit einander in Verbindung (§. 120). Verf.

mer eine ungerade Anzahl Durchschnitte haben, wenn die verglichenen Punkte auf verschiedenen Seiten der Axe liegen, wie X und E, X und I, X und Y. Hieraus folgt der analytische Satz, daß **zwischen zwei Werthen von x, welche durch ihre Substitution in der vorgelegten Gleichung zwei Resultate von gleichen Zeichen geben, nur eine gerade Anzahl reeller Wurzeln liegen kann, daß hingegen die Zahl derselben ungerade ist, wenn die Resultate verschiedene Zeichen haben.**

4) Endlich trägt es sich zuweilen zu, daß zufolge der Beziehung, in der die Coefficienten a, b, c, d, e, f . . . zu einander stehen können, zwei auf einander folgende Durchschnitte, wie K und M, einander sich nähernd zusammenfallen, und daß der Theil IKLMY der Curve, indem er die Form des punktirten Zuges IL′Y annimmt, die Axe AB bloß berührt. In diesem Fall werden die beiden durch AK und AM ausgedrückten Wurzeln einander und der Abscisse AL′ gleich sein. Man sieht leicht, daß, wenn die vorgelegte Gleichung keine reellen Wurzeln weiter hätte, die daraus hergeleitete Curve ihre Axe nirgends schneiden würde, und daß man folglich durch keine Substitution das Zeichen des ersten Theils dieser Gleichung ändern könnte. Dasselbe würde aber nicht statt finden, wenn sich drei Durchschnitte vereinigten; die Curve würde dann wenigstens einmal, sei es vor oder nachher, die Axe schneiden. Um sich hievon zu überzeugen, braucht man nur zu sehen, was von dieser Curve übrig bleiben würde, wenn die drei Punkte H, K und M oder F, H und K zusammenfielen. Verfolgt man diese Betrachtungen, so wird man finden, daß durch die Vereinigung einer geraden Anzahl von Durchschnittspunkten die aus der vorgelegten Gleichung hergeleitete Curve sich gänzlich auf derselben Seite der Axe befinden kann, daß aber dieser Umstand nie eintritt, wenn die Anzahl der in einem einzigen Punkt zusammentreffenden Durchschnitte ungerade ist; und man wird hieraus schließen, daß, wenn eine Gleichung nur eine gerade Zahl gleicher Wurzeln zu

reellen Wurzeln hat, es unmöglich ist, die Existenz derselben durch irgend eine Substitution zu erkennen.

Oft reicht die Ansicht einer kleinen Anzahl Punkte der Curve hin, um die Stelle, wo sie sich der Axe der Abscissen am meisten nähert, zu erkennen; wenn man dann in dieser Gegend die Zahl der bestimmten Punkte vermehrt, so erfährt man mit Sicherheit, ob eine Berührung oder ein Durchschnitt statt findet, ob folglich die vorgelegte Gleichung vollkommen gleiche oder nur wenig von einander verschiedene Wurzeln hat. In diesem Fall kann die Construktion der Curve eben so sehr dazu dienen, die numerische Auflösung zu erleichtern, als ihren Gang aufzuklären.

Anhang,

die ersten Gründe der Anwendung der Algebra auf die krummen Flächen und auf die Curven von doppelter Krümmung enthaltend *).

Gleichung der Ebene und der geraden Linie.

§. 175.

Die bequemste Art, die Lage irgend eines Punkts M im Raum, *Fig.* 64, zu bestimmen, ist die, ihn zuvörderst auf eine der Lage nach gegebene Ebene BAC zu projiciren, indem man auf diese Ebene die Senkrechte MM′ herabläßt, und dann die Projection M′ auf zwei auf einander senkrechte Axen AB und AC vermittelst der Coordinaten AP und PM′ zu beziehen. Dies heißt, den Punkt selbst auf die drei auf einander senkrechten Ebenen BAC, BAD und DAC beziehen; denn die Coordinaten AP und PM′, welche in der Ebene BAC liegen, stellen die Entfernungen MM‴ und MM″ des vorgelegten Punkts M von den beiden andern Ebenen DAC und BAD vor. Die Geraden AB, AC, AD, worin sich je zwei der coordinirten Ebenen BAC, BAD, DAC schneiden, sind die Axen der Coordinaten, und man unterscheidet sie durch den jedesmaligen

*) Ich glaube den in dieser Art von Betrachtungen wenig geübten Lesern bemerken zu müssen, daß sie in meinem *Complément des Élémens de Géometrie* die zum Verständniß des Folgenden unentbehrlichen Grundbegriffe entwickelt finden werden. Verf.

Buchstaben, welcher die ihnen parallele Coordinate bezeichnet. Setzt man also AP = x, PM′ = y, M′M = z, so wird AB die Axe der x, AC die der y und AD die der z sein.

Die coordinirten Ebenen selbst erhalten ähnliche Benennungen. Die Ebene BAC wird die der x, y genannt, weil sie die Coordinaten x und y enthält. Da die Projection M″ des Punkts M auf die Ebene BAD vermittelst der Coordinaten AP = x und PM″ = M′M = z auf die beiden Axen AB und AD bezogen wird, so bezeichnet man diese Ebene mit dem Namen der Ebene der x, z. Endlich da man die Projection M‴ des Punkts M auf die Ebene DAC vermittelst der Coordinaten AQ = PM′ = y und QM‴ = M′M = z auf die Axen AC und AD bezieht, so belegt man diese Ebene mit dem Namen der Ebene der y, z.

Dies vorausgesetzt, sind die Coordinaten y und z für alle Punkte der Axe AB der x zu gleicher Zeit Null, und dies gilt ebenfalls von x und z mit Bezug auf AC, die Axe der y, und von x und y mit Bezug auf AD, die Axe der z.

Für alle Punkte der Ebene BAC ist die Coordinate z Null, und sie hat für alle in irgend einer dieser ersten parallel gelegten Ebene befindliche Punkte einen beständigen Werth, so daß die Gleichung z = c, wenn sie allein vorhanden ist und man in Hinsicht auf die beiden anderen Coordinaten x und y keine anderweitige Bestimmung hat, so angesehen werden muß, als bezeichne sie die Punkte einer Ebene, welche der BAC in der Entfernung c parallel ist. Man wird eben so sehen, daß die Coordinate y für alle Punkte der Ebene BAD Null ist, und daß die Gleichung der Ebene, welche man dieser ersten in einer Entfernung b parallel legte, y = b sein würde.

Wenn man die beiden Gleichungen z = c und y = b vereinigt oder annimmt, daß sie zu gleicher Zeit statt finden, so werden sie eine gerade zur Axe der x parallele und durch den Punkt der Ebene der y, z, dessen Coordinaten c und b sind, gelegte Linie bezeichnen; denn es ist leicht einzusehen, daß

diese Gerade als der Durchschnitt zweier Ebenen betrachtet werden kann, welche den Ebenen BAC und BAD parallel sind.

In der Ebene DAC endlich ist die Coordinate x immer Null und x = a ist die Gleichung der Ebene, die in einem Abstande a zur ersten parallel gelegt wird. Die drei Gleichungen z = c, y = b, x = a vereinigt, werden nur noch zu dem Punkte gehören können, welcher sich im Durchschnitt der drei den Coordinatenebenen BAC, BAD und DAC parallel gelegten Ebenen befindet.

§. 176.

Ich will nun untersuchen, was eine einzige Gleichung zwischen zwei der drei unbestimmten Größen x, y und z bezeichnet, und z. B. z = Ax setzen. Man sieht zuvörderst, daß diese Gleichung der in der Ebene BAC der x, z, *Fig.* 65, gezogenen Geraden AN″ angehört (§. 87); allein sie ist in einem noch weiteren Sinne zu nehmen; denn wenn man sich vorstellt, daß die Linie AN″ sich längs AC, der Axe der y, parallel zu sich selbst fortbewegt, so wird, in welcher Lage sie auch zum Stillstand kommen mag, die Ordinate z oder M′m, die man in irgend einem auf der zu AC parallelen Geraden PM′ befindlichen Punkt M′ annimmt, der Ordinate Pm″ gleich sein, welche in der Ebene BAD der Abscisse AP = QM′ correspondirt. Die Linie AN″ beschreibt durch die ihr hier beigelegte Bewegung die durch die Geraden AN″ und AC gehende Ebene N″AC; man wird also für alle Punkte dieser Ebene z = Ax haben.

Aehnliche Folgerungen würde man für die andern coordinirten Ebenen ziehen können, wenn man zwischen den Unbestimmten, welche sie enthalten, Gleichungen bildete; ich will aber lieber sogleich zu einem allgemeineren Fall übergehen, und die Gleichung z = Ax + By betrachten.

Setzt man darin y = 0, so hat man z = Ax, und wird daraus schließen, daß die in dieser letzteren Gleichung begriffene Gerade AN″ alle Punkte enthält, welche die durch die

Gleichung $z = Ax + By$ ausgedrückte Fläche mit der coordinirten Ebene BAD, auf welcher y immer Null ist, gemein hat, und daß folglich die Gerade AN'' der Durchschnitt dieser Ebene mit der vorgelegten Fläche ist.

Setzt man $x = 0$, so erhält man $z = By$, eine Gleichung, welche zu der durch den Anfangspunkt A in der Ebene DAC gelegten Geraden AN''' gehört, und welche der Durchschnitt dieser letzteren Ebene mit der durch die Gleichung $z = Ax + By$ ausgedrückten Fläche ist.

Wenn man sich nun vorstellt, daß die Linie AN''' sich längs der Linie AN'' parallel zu sich selbst bewegt, so wird sie die Ebene N'''AN'' beschreiben, und wenn sie zu irgend einer Lage m''M gelangt sein wird, so wird der Theil Mm der Ordinate M'M gleich und parallel Qm'' sein, und man wird folglich haben

$$M'M = Pm'' + Qm''' = Ax + By = z,$$

woraus folgt, daß die Ebene N'''AN'', welche durch die Linien AN'' und AN''' geht, deren Gleichungen

$$z = Ax, \quad z = By$$

sind, selbst zur Gleichung hat

$$z = Ax + By.$$

Wenn die vorgelegte Ebene, statt durch den Anfangspunkt A zu gehen, sich in einer Lage G'''EG'' befände, welche durch die den Geraden AN'' und AN''' parallelen EG'' und EG''' bestimmt ist, so würde sie der N'''AN'' parallel sein; und wenn man die Ordinate der letzteren Ebene so weit verlängert, bis sie die erste erreicht, so hat man

$$M'L = M'M + ML = M'M + AE.$$

Bezeichnet man nun den Abstand AE mit D und die Ordinate M'L mit z, so wird nach dem Vorhergehenden sein

$$z = Ax + By + D.$$

Dies ist die Gleichung einer in irgend einer Lage befindlichen Ebene. Man wird sich leicht überzeugen, daß sie die allgemeine Gleichung vom ersten Grade mit drei unbestimmten

Größen darstellt; denn diese letztere kann nur von der Form

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

sein, und dividirt man sie durch γ, so reducirt sie sich auf die erste, wenn man

$$-\frac{\alpha}{\gamma} = A, -\frac{\beta}{\gamma} = B, = \frac{\delta}{\gamma} = D$$

setzt.

Man sieht also, daß der Coefficient γ zur Verallgemeinerung der Gleichung nichts beiträgt; ich werde ihn indessen beibehalten, um den Formeln mehr Symmetrie zu geben, und daher die Gleichung irgend einer Ebene durch

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

darstellen *). Man muß sich aber erinnern, daß man in allen Resultaten einen der Coefficienten der Einheit gleich setzen oder aus besonderen Bedingungen bestimmen kann **).

---

*) Um die Ebene, welche diese Gleichung andeutet, zu construiren, muß man die Gleichung erst auf die Form

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$$

oder

$$z = -A'x - B'y - D'$$

bringen, dann in der Ebene x, z eine Linie ziehen, die zur Gleichung $z = -A'x$ hat, ferner in der Ebene der y, z eine Linie, deren Gleichung $z = -B'y$ ist, dann durch diese beide Linien eine Ebene legen, und endlich durch den Punkt der Axe z, der durch den Abstand $-D'$ vom Anfangspunkt bestimmt wird, eine zweite Ebene der vorigen parallel. Die letztere wird die verlangte sein. Eben so gut kann man die vorgelegte Gleichung auf eine der Formen

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}z - \frac{D}{B}$$

oder

$$x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A}z - \frac{D}{A}$$

bringen. Uebers.

**) Man vergleiche die Anmerkung E am Schluß des Werks. Verf.

§. 177.

Setzt man in der Gleichung dieser Ebene nach einander x, y und z gleich Null, so wird man finden, daß sie die der y, z in einer Linie schneidet, deren Gleichung $By + Cz + D = 0$, die der x, z in einer Linie, deren Gleichung $Ax + Cz + D = 0$, und endlich die der x, y in einer Linie, deren Gleichung $Ax + By + D = 0$ ist.

Da die Ebenen von unbegränzter Ausdehnung sind, so muß man sich vorstellen, daß die Ebene G‴EG″ hinter die coordinirten Ebenen BAD, DAC erweitert sei; sie wird alsdann die Ebene BAC treffen und unter sie hinabgehen. Alle diese Umstände kann man aus ihrer Gleichung abnehmen, wenn man erwägt, daß jede der Unbestimmten x, y, z positiv und negativ genommen werden muß, und daß, wenn die Theile AB, AC und AD, *Fig.* 64, der Axen der Coordinaten mit den positiven Werthen dieser Größen übereinstimmen, die entgegengesetzten Theile Ab, Ac und Ad den negativen entsprechen. Dies läßt sich unmittelbar aus dem Fortgange der in den Ebenen BAC, BAD und DAC liegenden Linien beweisen; man würde aber eben dahin gelangen, wenn man jede dieser Ebenen dergestalt zu sich selbst parallel fortschöbe, daß die darauf senkrechten negativen Ordinaten positiv würden, und man könnte dann ähnliche Betrachtungen wie bei den Linien anstellen (§. 76).

Hieraus folgt, daß man vermittelst der Zeichen, womit die Coordinaten behaftet sind, allemal unterscheiden kann, in welchem der acht körperlichen Winkel, welche die coordinirten Ebenen um A bilden, ein gegebener Punkt zu finden ist; man braucht zu dem Ende bloß in Erwägung zu ziehen, daß, wenn man

$+x +y +z$ in dem Winkel ABCD nimmt, man hat
$+x +y -z$ in dem Winkel ABCd,
$+x -y +z$ in dem Winkel ABDc,
$-x +y +z$ in dem Winkel ACDb,
$+x -y -z$ in dem Winkel ABcd,

$-x - y + z$ in dem Winkel ADbc,
$-x + y - z$ in dem Winkel ACbd,
$-x - y - z$ in dem Winkel Abcd.

§. 178.

Eine gerade Linie ist gegeben, wenn man zwei Ebenen kennt, in denen sie sich zugleich befindet oder deren Durchschnitt sie ist, weil die Coordinaten ihrer Punkte den Gleichungen dieser Ebenen gemein sind. Es seien also

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ldots (1)$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0 \ldots (2)$$

die Gleichungen der gegebenen Ebenen; sieht man nun die Coordinaten x, y und z so an, als hätten sie in beiden Gleichungen einerlei Werth, so wird nur eine übrig bleiben, die man willkürlich annehmen kann, und die beiden andern, dem gewählten Werth gemäß berechnet, werden die Lage der verschiedenen Punkte der vorgelegten Linie zu erkennen geben.

Die Gleichungen (1) und (2) sind nicht die einzigen, welche die vorgelegte gerade Linie darstellen können; denn sie befindet sich in unendlich vielen verschiedenen Ebenen. Indessen wählt man gewöhnlich unter allen Gleichungen, die sie haben kann, diejenigen, welche nur zwei der Coordinaten x, y und z enthalten.

Eliminirt man nach einander x, y und z aus den Gleichungen (1) und (2), so wird man folgende drei Gleichungen erhalten:

$$(AB' - A'B)y - (CA' - C'A)z + AD' - A'D = 0,$$
$$(BC' - B'C)z - (AB' - A'B)x + BD' - B'D = 0,$$
$$(CA' - C'A)x - (BC' - B'C)y + CD' - C'D = 0,$$

welche sich in

$$\gamma y - \beta z + \delta = 0 \ldots (3)$$

$$\alpha z - \gamma x + \varepsilon = 0 \ldots (4)$$

$$\beta x - \alpha y + \zeta = 0 \ldots (5)$$

verwandeln, wenn man zur Abkürzung

$AB' - A'B = \gamma$, $CA' - C'A = \beta$, $BC' - B'C = \alpha$,
$AD' - A'D = \delta$, $BD' - B'D = \varepsilon$, $CD' - C'D = \zeta$
setzt. Je zwei dieser Gleichungen sind hinreichend, die Stelle der Gleichungen (1) und (2) zu vertreten, und begreifen zugleich die dritte in sich; und wirklich wird man, wenn man die Gleichung (3) durch α, die Gleichung (4) durch β, die Gleichung (5) durch γ multiplicirt und die Produkte addirt,

$$\alpha\delta + \beta\varepsilon + \gamma\zeta = 0$$

erhalten, ein Resultat, das durch die Substitution der Werthe α, β, γ, δ, ε, und ζ identisch werden, oder die Bedingung ausdrücken wird, welche diese Größen erfüllen müssen, wenn die *a priori* gesetzten Gleichungen (3), (4) und (5) zugleich derselben geraden Linie angehören sollen.

Die Gleichung (3), welche die Beziehung angiebt, in der die Coordinaten y und z für sämmtliche Punkte der vorgelegten Geraden zu einander stehen müssen, gehört den Projectionen aller dieser Punkte auf die Ebene der y, z an, und ist folglich die Gleichung der Projection der vorgelegten Geraden auf diese Ebene (*Complément des Élémens de Géométrie* §. 4). Eben so sieht man, daß die Gleichung (4) die der Projection dieser Geraden auf die Ebene x, z, und die Gleichung (5) die ihrer Projection auf die Ebene der x, y ist. Wenn also irgend zwei dieser Projectionen gegeben sind, so ist die Gerade völlig bestimmt, was aus obiger Analyse und auch daraus erhellet, daß die vorgelegte Gerade nichts anderes als der Durchschnitt irgend zweier der projicirenden Ebenen ist (*Complément* §. 5), deren Gleichung mit der der Projection, über welcher sie errichtet sind, übereinstimmt (§. 176).

§. 179.

Da die allgemeine Gleichung der Ebene nur drei nothwendige Constanten enthält (§. 176), so ist auch eine gleiche Anzahl Bedingungen hinreichend, sie einem besonderen Fall anzupassen. Ich werde hier diejenigen unter diesen Bedingungen angeben,

welche am häufigsten vorkommen, und zugleich von den analogen sich auf die geraden Linien beziehenden Aufgaben handeln.

Wenn man eine Ebene durch drei Punkte legen soll, deren Coordinaten

$$x', y', z', \quad x'', y'', z'', \quad x''', y''', z'''$$

sind, so setzt man in die allgemeine Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

nach einander

$$x', x'', x''' \text{ statt } x,$$
$$y', y'', y''' \text{ statt } y,$$
$$z', z'', z''' \text{ statt } z,$$

und es werden folgende drei Gleichungen entstehen:

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$
$$Ax'' + By'' + Cz'' + D = 0,$$
$$Ax''' + By''' + Cz''' + D = 0,$$

vermittelst deren man die Größen $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$ bestimmt. Man erhält

$$\frac{A}{D} = \frac{z'(y''-y''') - z''(y'-y''') + z'''(y'-y'')}{x'(y''z'''-y''z') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')}$$

$$\frac{B}{D} = \frac{x'(z''-z''') - x''(z'-z''') + x'''(z'-z'')}{x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')}$$

$$\frac{C}{D} = \frac{y'(x''-x''') - y''(x'-x''') + y'''(x'-x'')}{x'(y''z'''-y'''z'') - x''(y'z'''-y'''z') + x'''(y'z''-y''z')}.$$

Es ist leicht einzusehen, daß man, wenn man die Gleichungen der Projectionen einer Geraden, die durch zwei gegebene Punkte geht, bestimmen wollte, auf eine ganz ähnliche Weise dazu gelangen würde, indem man in die allgemeinen Gleichungen

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

die Coordinaten dieser Punkte setzte. Es wird sich ergeben

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z'),$$

$$y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z') \text{ (§. 88).}$$

§. 180.

Um zu erkennen, wann zwei gegebene Gerade einander schneiden, also in Einer Ebene liegen, muß man untersuchen, ob die Unbestimmten x, y und z den vier Gleichungen der Projectionen dieser Geraden gemein sein können (*Complément* §. 19). Nun ist offenbar, daß, wenn man x, y und z eliminirt, eine Gleichung bleiben wird, welche die Bedingung ausdrückt, ohne welche die Gleichungen der vorgelegten Geraden nicht für denselben Punkt statt haben können. Es seien

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{array}\right\}$$

die Gleichungen dieser Geraden, so hat man

$$az + \alpha = a'z + \alpha', \quad bz + \beta = b'z + \beta',$$

und wenn man z eliminirt, so entsteht

$$(\alpha' - \alpha)(b' - b) - (\beta' - \beta)(a' - a) = 0\ ^{*}).$$

§. 181.

Von zwei einander parallelen Ebenen sind die Durchschnitte mit jeder der coordinirten Ebenen parallel zu einander (*Compl.* §. 15). Wenn aber

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

die Gleichungen dieser beiden Ebenen sind, so werden ihre gemeinschaftlichen Durchschnitte mit der Ebene der x, z und der y, z zu Gleichungen haben

---

*) Wenn die gegebenen Geraden einander schneiden, so werden natürlich auch ihre Projectionen sowohl in der Ebene der x, z als in der Ebene der y, z einander schneiden. Es müssen daher x und z in den Gleichungen

$$x = az + \alpha, \quad x = a'z + \alpha',$$

so wie y und z in den Gleichungen

$$y = bz + \beta, \quad y = b'z + \beta'$$

der Projectionen identisch sein (§. 105); man erhält mithin

$$(\alpha' - \alpha)(b' - b) - (\beta' - \beta)(a' - a) = 0$$

als Bedingungsgleichung für den Fall des Durchschnitts. Uebers.

$$Ax + Cz + D = 0,\quad A'x + C'z + D' = 0,$$
$$By + Cz + D = 0,\quad B'y + C'z + D' = 0,$$

und es werden je zwei derselben nur dann parallel sein, wenn man haben wird,

$$\frac{A}{C} = \frac{A'}{C'},\ \frac{B}{C} = \frac{B'}{C'}\ (§.89).$$

Zieht man aus diesen letzteren Gleichungen die Werthe von A′ und B′, so wird man zur Gleichung der der ersten parallelen Ebene haben

$$\frac{C'}{C}(Ax + By + Cz) + D' = 0.$$

In diesem Resultat bleibt noch D′ zu bestimmen. Nimmt man nun an, daß die gesuchte Ebene durch einen Punkt gehen soll, dessen Coordinaten x′, y′ und z′ sind, so wird man haben

$$\frac{C'}{C}(Ax' + By' + Cz') + D' = 0,$$

und zieht man diese Gleichung von der vorhergehenden ab, so wird D′ verschwinden, und wenn man dann durch $\frac{C'}{C}$ dividirt, so wird man erhalten

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0.$$

Es ist hier zu bemerken, daß, wenn man A, B und C als beliebige Größen betrachtet, die vorstehende Gleichung allen Ebenen, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, gemein sein wird.

Da zwei gerade Linien zu einander parallel laufen, wenn ihre Projectionen auf jede der coordinirten Ebenen parallel sind (*Compl.* §. 20), so werden ihre Gleichungen in diesem Fall von der Form

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = az + \alpha' \\ y = bz + \beta' \end{array}\right\}$$

sein.

Wenn die zweite durch einen Punkt gehen soll, dessen

Coordinaten x', y' und z' sind, so wird man zur Bestimmung von α' und β' die Gleichungen haben

$$x' = az' + \alpha' \text{ und } y' = bz' + \beta',$$

woraus man zieht, wenn man wie so eben verfährt,

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z').$$

§. 182.

Um die Gleichung einer Ebene zu finden, welche auf einer gegebenen Geraden senkrecht ist, muß man sich erinnern, daß die gemeinschaftlichen Durchschnitte dieser Ebene mit jeder der coordinirten Ebenen auf den Projectionen der gegebenen Geraden senkrecht sind (*Compl.* §. 32). Es seien

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta$$

die Gleichungen dieser Geraden und

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die der gesuchten Ebene; die gemeinschaftlichen Durchschnitte der letzteren mit der Ebene der x, z und der y, z werden durch

$$Ax + Cz + D = 0 \text{ oder } x = -\frac{Cz}{A} - \frac{D}{A},$$

$$By + Cz + D = 0 \text{ oder } y = -\frac{Cz}{B} - \frac{D}{B}$$

ausgedrückt sein, und damit diese Geraden auf den Projectionen der gegebenen Geraden senkrecht werden, muß man haben

$$a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C} \text{ (§. 90).}$$

Substituirt man die aus diesen Gleichungen gezogenen Werthe von A und B in die der gesuchten Ebene, so wird man haben

$$C(ax + by + z) + D = 0,$$

und wenn diese Ebene durch einen Punkt gehen soll, dessen Coordinaten x', y' und z' sind, so wird ihre Gleichung werden

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0.$$

Wenn die Gleichung der Ebene gegeben wäre und man die der auf ihr senkrechten geraden Linie suchte, so muß man statt a und b ihre obigen Werthe setzen, und man würde erhalten

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z'), \quad y - y' = \frac{B}{C}(z - z')$$

für die Gleichungen der Geraden, welche auf der durch $Ax + By + Cz + D = 0$ ausgedrückten Ebene senkrecht ist und durch den Punkt gehen soll, dessen Coordinaten x', y' und z' sind.

§. 183.

Der Abstand des Punkts M, *Fig.* 64, dessen Coordinaten x, y und z sind, vom Anfangspunkt A hat zum Ausdruck

$$\sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{PM'}^2 + \overline{MM'}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\textit{Compl.}\ §. 24).$$

Der Abstand zweier beliebigen Punkte M und m wird gefunden, wenn man $PO = pm'$ und $M'N = m'm$ nimmt, und die Dreiecke $m'OM'$ und mNM betrachtet, welche beide rechtwinklich sind, das eine in O, das andere in N, mithin geben

$$\overline{m'M'}^2 = \overline{m'O}^2 + \overline{M'O}^2, \quad \overline{mM}^2 = \overline{mN}^2 + \overline{MN}^2.$$

Bezeichnet man nun die Coordinaten des Punkts m mit x', y', z', so erhält man $m'O = x - x'$, $M'O = y - y'$, $MN = z - z'$, und da $mN = m'M'$, so ergiebt sich

$$mM = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

§. 184.

Dies führt auf die Gleichung der Kugel; denn da alle Punkte ihrer Oberfläche vom Mittelpunkt gleich weit entfernt sein müssen, so wird, wenn man zuerst den Mittelpunkt selbst für den Anfangspunkt der Coordinaten nimmt und den Halbmesser mit r bezeichnet, die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

für alle Punkte derselben gelten, und wenn die Coordinaten des Mittelpunkts x', y', z' sind, so wird man haben

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = r^2\ *).$$

*) Man sieht sogleich, wie solche Gleichungen zu nehmen sind. Da sie drei unbestimmte Größen x, y und z enthalten, so geben sie für jede derselben nur dann einen bestimmten Werth, wenn die Werthe der beiden andern beliebig gesetzt sind. Uebers.

§. 185.

Das Vorhergehende führt ganz einfach auf den Ausdruck für den Cosinus des Winkels, welchen zwei gegebene Gerade mit einander bilden. Es seien

$$\left.\begin{array}{l} x - x' = a(z - z') \\ y - y' = b(z - z') \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x - x' = a'(z - z') \\ y - y' = b'(z - z') \end{array}\right\}$$

die Gleichungen der Projectionen dieser Geraden, welche sich in einem Punkte schneiden, dessen Coordinaten x', y' und z' sind (§. 88). Stellt man sich nun vor, daß sie sich parallel zu sich selbst bewegen, bis ihr Durchschnittspunkt in den Anfangspunkt fällt, so wird sich ihr Winkel nicht ändern, und die obigen Gleichungen werden sich auf

$$\left.\begin{array}{l} x = az \\ y = bz \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = a'z \\ y = b'z \end{array}\right\}$$

reduciren.

Denkt man sich ferner eine Kugel, die den Anfangspunkt der Abscissen zum Mittelpunkt hat und deren Halbmesser durch r ausgedrückt ist, so wird der Abstand der Punkte, worin ihre Oberfläche jeden Schenkel des gesuchten Winkels schneidet, offenbar die Sehne dieses Winkels sein. Man wird die Coordinaten des Durchschnitts der ersten Geraden mit der Kugelfläche finden, wenn man vermittelst der Gleichung dieser Geraden und der der Kugel x, y und z bestimmt. So ergiebt sich

$$x = \frac{ar}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},\ y = \frac{br}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},\ z = \frac{r}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Bezeichnet man die Coordinate des Durchschnitts der zweiten Geraden mit der Kugelfläche durch x', y', z', so wird man eben so haben

$$x' = \frac{a'r}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}},\ y' = \frac{b'r}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}},\ z' = \frac{r}{\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}.$$

Der Ausdruck für das Quadrat des Abstandes dieses Punkts vom vorigen wird sein

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z') \quad (§. 183);$$

setzt man darin statt

$$x - x', \quad y - y', \quad z - z'$$

ihre Werthe, so wird man nach den Reductionen finden

$$r^2 \left[2 - \frac{2(1 + aa' + bb')}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2 + b'^2)}}\right].$$

Bezeichnet man aber den gesuchten Winkel mit V, so wird seine Sehne

$$\sqrt{2R^2 - 2R \cos V}$$

sein (§. 13), wo R den Halbmesser ausdrückt. Setzt man nun diesen Halbmesser = 1, so erhält man zum Quadrat der Sehne $2(1 - \cos V)$, und vergleicht man diesen Werth mit dem oben gefundenen, worin man ebenfalls $r = 1$ nimmt, so wird man haben

$$\cos V = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2 + b'^2)}}.$$

Hieraus leitet man leicht her

$$\sin V = \frac{\sqrt{(ab' - a'b)^2 + (a - a')^2 + (b - b')^2}}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2 + b'^2)}}.$$

Wenn die beiden vorgelegten Geraden auf einander senkrecht sein sollen, muß $\cos V = 0$, mithin $1 + aa' + bb' = 0$ sein.

§. 186.

Es ist hier der Ort, von den Relationen der Winkel zu sprechen, welche irgend eine gerade Linie*) mit den Axen der Coordinaten bildet, weil man dieselben mit vielem Erfolg in die Mechanik eingeführt hat und weil sie den Gleichungen dieser Geraden mehr Symmetrie geben.

Um vermittelst der Ausdrücke des vorigen §en dahin zu gelangen, nehme ich an, die zweite gegebene Gerade sei eine der Axen, z. B. die der x. Dann wird für die Linie $y = 0$

---

*) Die man sich parallel mit sich selbst fortgeschoben denken muß, bis sie durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Uebers.

sein, mithin für jeden Werth von x auch $b' = 0$. Erwägt man nun, daß a' in der Gleichung $x = a'z$ die Tangente des Winkels bezeichnet, den die Projection der jedesmaligen Linie mit der Axe der z bildet (§. 86), so wird, da dieser Winkel ein rechter ist, wenn die Linie mit der Axe der x zusammenfällt, a' unendlich sein (§. 24). Die Voraussetzung $b' = 0$ bringt zuvörderst den Ausdruck für *cos* V auf

$$\frac{1 + aa'}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2)}}.$$

Dividirt man Zähler und Nenner durch a', so erhält man

$$\frac{\frac{1}{a'} + a}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)\left(\frac{1}{a'^2} + 1\right)}},$$

und setzt man nun a' unendlich, so entsteht

$$\frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Dies ist der Ausdruck für den Cosinus des Winkels, den die erste Gerade mit der Axe der x bildet.

Eben so wird man für die Axe der y, in Bezug auf welche $a' = 0$ und b' unendlich ist, finden

$$\frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Für die Axe der z, rücksichtlich auf welche $a' = 0$ und $b' = 0$ ist, wird man erhalten

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Bezeichnet man die drei Winkel, deren Cosinus ich hier angegeben habe, mit α, β, γ, so wird man haben

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},\quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Quadrirt man diese drei Gleichungen und addirt sie, so entsteht

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = \frac{a^2 + b^2 + 1}{1 + a^2 + b^2} = 1.$$

§. 187.

Da der Ausdruck für $\cos\gamma$

$$\sqrt{1 + a^2 + b^2} = \frac{1}{\cos\gamma}$$

giebt, so wird man, wenn man diesen Werth in die Ausdrücke für $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ setzt, erhalten

$$a = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad b = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

und die Gleichungen der ersten Geraden werden folgende Gestalt annehmen:

$$(x - x') \cos\gamma = (z - z') \cos\alpha,$$
$$(y - y') \cos\gamma = (z - z') \cos\beta.$$

Substituirt man die Werthe von a und b in die Gleichung der Ebene, welche auf dieser Geraden senkrecht steht, nämlich in

$$a(x - x') + b(y - y') + (z - z') = 0 \quad (§. 182),$$

so wird man dieses sehr symmetrische Resultat erhalten:

$$(x - x') \cos\alpha + (y - y') \cos\beta + (z - z') \cos\gamma = 0.$$

Bezeichnet man endlich mit α', β', γ' die Winkel, die eine zweite Gerade mit den Axen der Coordinaten bildet, was geben wird

$$a' = \frac{\cos\alpha'}{\cos\gamma'}, \quad b' = \frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'},$$

so wird der Ausdruck für den Cosinus des Winkels, den diese zweite Gerade mit der ersten bildet (§. 185), sich in

$$\cos V = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma'$$

verwandeln, wenn man bedenkt, daß

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1, \quad \cos\alpha'^2 + \cos\beta'^2 + \cos\gamma'^2 = 1$$

ist.

§. 188.

Die Nützlichkeit dieser Formeln kann ein directes Verfahren,

sie zu erhalten, wünschenswerth machen. Auf ein solches führen leicht folgende geometrische Betrachtungen.

1) Nimmt man an, daß die gegebene Gerade selbst parallel in den Anfangspunkt der Coordinaten versetzt und durch AM, *Fig.* 78, vorgestellt wird, so wird das Dreieck APM in P rechtwinklig sein, weil die Ebene M′PM″ auf der Axe AB senkrecht steht. Man wird hieraus schließen

$$\cos PAM = \frac{AP}{AM} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},$$

indem man $AM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (§. 183) und für x und y ihre Werthe az und bz setzt *).

Eben so ergiebt sich

$$\cos QAM = \frac{AQ}{AM} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},$$

$$\cos RAM = \frac{AR}{AM} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}},$$

wodurch man sogleich zu der Relation gelangt

$$\cos \overline{PAM}^2 + \cos \overline{QAM}^2 + \cos \overline{RAM}^2 = 1.$$

2) Die Dreiecke APM und ARM geben $AP = AM \cos PAM$ und $AR = AM \cos RAM$, und da $AR = PM''$ ist, so entsteht

$$\frac{AP}{PM''} = \frac{\cos PAM}{\cos RAM} \text{ oder } \frac{x}{z} = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma},$$

wenn man mit α und γ die Winkel bezeichnet, welche die Gerade AM mit den Axen der x und der z bildet. Eben so wird man erhalten

$$\frac{y}{z} = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma},$$

wo β den Winkel andeutet, den die vorgelegte Gerade mit der Axe einschließt.

---

*) AM″ und AM‴ sind, wie man sieht, die Projectionen der Linie AM auf die Ebenen BAD und CAD, also a und b die Tangenten der Winkel M″AD und M‴AD in den Gleichungen $x = az$ und $y = bz$ dieser Projectionen. Uebers.

3) Man bestimmt zuweilen eine Gerade wie MA durch den Winkel MAM', den sie mit ihrer Projection auf die Ebene der x, y bildet, und durch den Winkel M'AP, den diese Projection mit der Axe der x macht. Ist nun θ der erste und φ der zweite dieser Winkel, so wird man haben

$$\begin{aligned} MM' &= AM \sin MAM' \text{ oder } & z &= AM \sin \theta, \\ AM' &= AM \cos MAM' \text{ oder } & AM' &= AM \cos \theta, \\ PM' &= AM' \sin M'AP \text{ oder } & y &= AM \cos \theta \sin \varphi, \\ AP &= AM' \cos M'AP \text{ oder } & x &= AM \cos \theta \cos \varphi. \end{aligned}$$

Bringt man die letzteren Ausdrücke für x, y, z in Verbindung mit denen, welche aus den Gleichungen

$$\frac{x}{z} = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}$$

hervorgehen, und erwägt, daß γ oder RAM das Complement von MAM' oder θ ist, so wird man erhalten

$$\cos \gamma = \sin \theta, \quad \cos \beta = \cos \theta \sin \varphi, \quad \cos \alpha = \cos \theta \cos \varphi.$$

Quadrirt man die letzteren Gleichungen und addirt sie, so findet man wie oben

$$\cos \gamma^2 + \cos \beta^2 + \cos \alpha^2 = 1.$$

Alle diese Relationen gehen auf die Auflösungen der sphärischen Dreiecke hinaus (§. 58). Man vergleiche auch die Anmerkung C am Ende des Buchs.

§. 189.

Der Cosinus des Winkels, den irgend zwei Ebenen mit einander einschließen, läßt sich unmittelbar aus §. 185 herleiten; denn dieser Winkel ist dem gleich, welchen zwei in beiden Ebenen über ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt aus einem beliebigen Punkt desselben errichtete Senkrechte mit einander bilden. Wenn diese Ebenen durch die Gleichungen

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

dargestellt sind, und man sich vorstellt, daß sie parallel zu sich selbst fortgeschoben werden, bis sie durch den Anfangspunkt der

Coordinaten

Coordinaten gehen, so wird ihr Winkel unverändert bleiben, und ihre Gleichungen werden sich auf

$$Ax + By + Cz = 0, \quad A'x + B'y + C'z = 0$$

reduciren, und die der Geraden, welche man auf jede derselben durch diesen Punkt senkrecht zieht, werden sein (§. 182)

$$x = \frac{A}{C} z, \quad x = \frac{A'}{C'} z$$

$$y = \frac{B}{C} z, \quad y = \frac{B'}{C'} z.$$

Substituirt man in dem Ausdruck für *cos* V statt a und b, a' und b', die Werthe, welche diese Gleichungen geben, so wird man haben

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)\ (A'^2 + B'^2 + C'^2)}}.$$

Wenn eine der vorgelegten Ebenen, die zweite z. B., die der x, y wäre, für welche man immer $z = 0$ hat, so werden offenbar bei dieser Annahme A' und B' Null werden, und *cos* V wird sich auf

$$\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

reduciren. Man wird eben so finden, daß der Cosinus des Winkels, den die erste vorgelegte Ebene mit der der x, z, für welche man $y = 0$, $A' = 0$, $C' = 0$ hat, einschließt

$$\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

und der Cosinus des Winkels derselben Ebene mit der der y, z, für welche man $x = 0$, $B' = 0$, $C' = 0$ hat,

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

sein wird.

In dem Fall, wo beide vorgelegte Ebenen auf einander senkrecht sind, wird man *cos* $V = 0$, folglich $AA' + BB' + CC' = 0$ haben.

Von den Flächen des zweiten Grades.

§. 190.

Die Flächen werden eben so, wie die Linien, nach dem Grade ihrer Gleichungen abgetheilt. Die Ebene ist die Fläche der ersten Ordnung, weil ihre Gleichung nur vom ersten Grade ist. Die Flächen von der zweiten Ordnung sind alle in folgender Gleichung begriffen:

$$\left.\begin{array}{r} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \\ + 2Gx + 2Hy + 2Kz \end{array}\right\} = L,$$

welche die allgemeinste ist, die man vom zweiten Grade mit den drei unbestimmten Größen x, y und z bilden kann.

Wenn man diese Gleichung mit Bezug auf einen Buchstaben, z. B. z, auflöst, so wird man finden

$$z = -\frac{Ex + Fy + K}{C}$$

$$\pm \frac{1}{C} \sqrt{\Big\{(K^2 + CL) + 2(EK - CG)x + 2(FK - CH)y}$$

$$\overline{+ (E^2 - AD)x^2 + 2(EF - CD)xy + (F^2 - BC)y^2\Big\}}.$$

Dieses Resultat zeigt, daß einem und demselben Punkt der Ebene der x, y zwei Punkte der vorgelegten Fläche entsprechen, und daß folglich jeder durch die Substitution aller möglichen Werthe von x und y entspringende Werth von z einen Theil der Fläche bildet, welcher in Rücksicht auf die ganze Fläche eben das ist, was die Zweige einer Curve in Rücksicht auf die Curve sind. Man nennt einen solchen Theil der Fläche **Mantel** (*Nappe*).

Zuvörderst sieht man, daß der rationale Theil des Werths von z die Ordinate einer Ebene ausdrückt, dergestalt daß, wenn man von derselben an die Ordinaten der Fläche rechnet, indem man

$$z + \frac{Ex + Fy + K}{C} = u$$

setzt, die Unbestimmte u zwei gleiche Werthe hat, einen positiven und einen negativen. Diese Ebene ist also in Betreff der Flächen vom zweiten Grade eben das, was der Durchmesser für die Curven von diesem Grade ist.

Man würde sich nur schwer einen Begriff von der Gestalt machen, die einer Fläche, von der man die Gleichung hat, zukommt, wenn man nur abgesonderte Punkte betrachtete; allein man stellt sich statt deren eine Menge Schnitte vor, welche in dieser Fläche durch Ebenen gebildet werden, die man zu größerer Einfachheit einer der coordinirten Ebenen parallel legt. Das Gesetz, nach welchem diese verschiedenen Schnitte oder Curven fortschreiten, giebt dann die Gestalt der vorgelegten Fläche zu erkennen.

Da alle Punkte einer zur Ebene der x, y in einer durch a bezeichneten Entfernung parallel gelegten Ebene in der Gleichung $z = a$ begriffen sind, so verwandelt sich die allgemeine Gleichung der Flächen vom zweiten Grade, wenn man darin diesen Werth substituirt, in

$$\left.\begin{array}{r} Ax^2 + By^2 + 2Dxy \\ + 2(Ea + G)x + 2(Fa + H)y \end{array}\right\} = L - 2Ka - Ca^2.$$

Diese Gleichung drückt die Beziehung aus, welche die Coordinaten der Ebene der x, y für alle in einer Entfernung a von dieser Ebene befindliche Punkte der vorgelegten Fläche zu einander haben, und gehört folglich auf der Ebene der x, y zur Projection der Curve, in welcher die Ebene, deren Gleichung $z = a$ ist, der Fläche vom zweiten Grade begegnet; und da diese Ebene der der x, y parallel ist, so wird offenbar der auf der Fläche selbst gemachte Schnitt von seiner Projection auf die Ebene der x, y nicht verschieden sein.

Nimmt man für a verschiedene Werthe, so erhält man verschiedene der Ebene der x, y parallele Schnitte; und setzt man $a = 0$, so wird die hieraus entspringende Gleichung

$$\left.\begin{array}{r} Ax^2 + By^2 + 2Dxy \\ + 2Gx + 2Hy \end{array}\right\} = L$$

die Curve vom zweiten Grade geben, in der die vorgelegte Fläche der Ebene der x, y begegnet. Man würde eben so die Gleichungen für die der Ebene der x, z und für die der Ebene der y, z parallelen Schnitte finden.

Man begreift leicht, und hat auch schon ein Beispiel davon bei der Kugel gesehen (§. 184), daß die Flächen, je nachdem sie auf eine mehr oder weniger symmetrische Weise gegen die Axen der Coordinaten gelegt sind, auch mehr oder weniger einfache Gleichungen haben, und daß man folglich, um die verschiedenen Arten von Flächen zu analysiren, welche die allgemeine Gleichung der Flächen vom zweiten Grade darstellen kann, sie zuvörderst von den Gliedern befreien muß, die nur von der besonderen Lage der Axen der Coordinaten abhängen, was geschehen kann, entweder indem man über die Wurzelgröße ähnliche Betrachtungen anstellt, wie es in den §§. 111—120 bei den Linien des zweiten Grades geschehen ist, oder indem man allgemeine Formeln zur Umformung der Coordinaten im Raum bildet, und eben solche auf die Lage der Axen sich beziehende Größen wie in den §§. 125—127 in Rechnung bringt, um die allgemeine Gleichung so viel als möglich zu vereinfachen. Man kann über diese Gegenstände, welche außer den Gränzen eines Elementarbuchs liegen, das fünfte Capitel des ersten Bandes meines Lehrbegriffs der Differential- und Integralrechnung nachsehen.

§. 191.

Ich will hier bloß bemerken, daß man aus §. 185 die Gleichung des geraden Kegels ziehen kann, welche Lage derselbe auch in Rücksicht auf die coordinirten Ebenen haben mag.

Denn da der gerade Kegel durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt wird, welche sich um eine andere, mit der sie einen beständigen Winkel macht, umherbewegt, so erhält man, wenn man die Coordinaten der Spitze durch α, β, γ bezeichnet, für die feste Gerade oder für die Axe des Kegels die Gleichungen

$$x - \alpha = a(z - \gamma),$$
$$y - \beta = b(z - \gamma),$$

und für die bewegliche Gerade oder für die Seite des Kegels die Gleichungen

$$x - \alpha = a'(z - \gamma),$$
$$y - \beta = b'(z - \gamma).$$

Es ist also der Cosinus des Winkels dieser beiden Geraden

$$\frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + a'^2 + b'^2)}};$$

da er beständig sein muß, so bezeichne man ihn durch c. Dann erwäge man, daß a und b, der Axe des Kegels angehörig, bekannte Größen sind, und daß man hat

$$a' = \frac{x - \alpha}{z - \gamma},\ b' = \frac{y - \beta}{z - \gamma}.$$

Substituirt man diese Werthe, so wird man die Gleichung

$$\frac{1 + a\left(\frac{x - \alpha}{z - \gamma}\right) + b\left(\frac{y - \beta}{z - \gamma}\right)}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)\left\{1 + \left(\frac{x - \alpha}{z - \gamma}\right)^2 + \left(\frac{y - \beta}{z - \gamma}\right)^2\right\}}} = c$$

bilden, welche sich leicht auf folgende reducirt:

$$\frac{a(x - \alpha) + b(y - \beta) + (z - \gamma)}{m\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}} = c\ ^{*}),$$

wenn man zur Abkürzung $\sqrt{1 + a^2 + b^2} = m$ setzt.

---

*) Man sieht leicht, daß, wenn man in dieser Gleichung $z = o$ setzte, das Resultat, welches dann dem Durchschnitt des Kegels von der Ebene der x, y angehörte, die Form der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades mit zwei Unbekannten annehmen würde, und daß sich auf diese Weise die Identität der Curven des zweiten Grades mit den Schnitten eines geraden Kegels von einer Ebene algebraisch nachweisen ließe; allein dieser Weg würde viel verwickelter und doch weniger allgemein sein, als der von §. 151 — 156 eingeschlagene, weil daselbst nicht bloß der gerade, sondern ein beliebiger Kegel betrachtet worden ist. Die Rechnung für einen schiefen Kegel mit kreisförmiger Grundfläche findet sich übrigens in dem *Appendix de superficiebus* am Schluß des zweiten 1748 erschienenen Bandes von Eulers *Introductio in Analysin infinitorum*. Verf.

Bringt man den Scheitel des Kegels in den Anfangspunkt der Coordinaten, so wird man haben $\alpha = o$, $\beta = o$, $\gamma = o$, und

$$\frac{ax + by + z}{m\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = c.$$

Läßt man die Axe des Kegels mit der Axe der z zusammenfallen, so hat man $a = o$, $b = o$, $m = 1$, weil auf dieser Axe $x = o$, $y = o$ ist, welchen Werth man auch für z annehmen mag, und die obige Gleichung reducirt sich auf

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = c,$$

aus welcher man durch Erhebung zum Quadrat

$$z^2 (1 - c^2) = c^2 (x^2 + y^2)$$

zieht. Macht man in dieser Gleichung $z = n$, so wird sie

$$n^2 (1 - c^2) = c^2 (x^2 + y^2),$$

eine Gleichung, welche zu einem Kreise gehört, dessen Mittelpunkt in der Axe der z liegt, und dessen Halbmesser $\frac{n\sqrt{1 - c^2}}{c}$ ist. Hieraus folgt, daß alle Schnitte des geraden Kegels von einer Ebene, welcher der der x, y parallel liegt, Kreise sind, wie es die Natur des Kegels mit sich bringt.

Aus obiger Gleichung zieht man

$$z = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \sqrt{x^2 + y^2},$$

und man sieht leicht ein, daß $\sqrt{1 - c^2}$ der Sinus des Winkels ist, den die Seitenlinie des Kegels mit der Axe der z einschließt, daß folglich $\frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}$ die Cotangente eben dieses Winkels, oder die Tangente desjenigen ist, welchen dieselbe Gerade mit der Ebene der x, y einschließt.

Wenn man den Scheitel des Kegels in irgend einen Punkt der Axe der z verlegen, aber noch immer diese Axe mit der des Kegels zusammenfallen lassen wollte, so würde man

$$z - \gamma = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \sqrt{x^2 + y^2}$$

erhalten.

Setzt man $z = o$, so hat man die Gleichung der Curve, in welcher der Kegel der Ebene der x, y begegnet. Diese Gleichung wird sein

$$- \gamma = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \sqrt{x^2 + y^2},$$

oder

$$\frac{\gamma^2 (1 - c^2)}{c^2} = x^2 + y^2;$$

sie gehört zu einem Kreise, dessen Halbmesser

$$\frac{\gamma \sqrt{1 - c^2}}{c}$$

ist.

Bezeichnet man diesen Halbmesser mit r, so hat man

$$r^2 = \frac{\gamma^2 (1 - c^2)}{c^2} \text{ und } \gamma = \frac{cr}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

Die Gleichung

$$z - \gamma = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \sqrt{x^2 + y^2},$$

welche sich dann in

$$z - \frac{cr}{\sqrt{1 - c^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \sqrt{x^2 + y^2}$$

verwandelt, kann unter der Form

$$z \sqrt{1 - c^2} - cr = c \sqrt{x^2 + y^2}$$

angesetzt werden. In dem Fall, wo $c = 1$ ist, verwandelt sie sich in

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

§. 192.

Diese letzte Gleichung, welche nicht mehr als zwei von den drei Coordinaten enthält, gehört zur cylindrischen Fläche, in welche der Kegel übergeht, wenn sein Scheitel sich unendlich weit entfernt; denn da c den Cosinus des Winkels bezeichnet, welcher von der den Kegel erzeugenden Geraden und seiner Axe gebildet

wird, so bringt die Annahme $c = 1$ diesen Winkel auf Null, woraus der Parallelismus beider Geraden folgt. Die erste beschreibt also, indem sie sich um die andere dreht, die Fläche eines geraden auf der Ebene der x, y senkrechten Cylinders, welcher auf dieser Ebene den Kreis zur Grundfläche hat, dessen Halbmesser r ist, und dessen Mittelpunkt im Anfangspunkt der Coordinaten liegt.

Dies führt auf die Bemerkung, daß irgend eine Gleichung, welche nur zwei der drei Coordinaten enthält, und eine Curve in der Ebene dieser Coordinaten bezeichnet, im Raum zu einer Fläche gehört, weil die Coordinate, welche in dieser Gleichung fehlt, als unabhängig von den beiden übrigen, für jeden Punkt der gedachten Ebene eine unendliche Menge Werthe hat; und diese Werthe entsprechen allen Punkten der Geraden, die man aus dem jedesmaligen Punkt der Curve über der coordinirten Ebene senkrecht errichtet.

Die auf diese Weise durch jeden Punkt der Curve senkrecht gelegten Geraden bilden zusammengenommen eine cylindrische Fläche, wenn man diese Benennung in dem weiten Sinne nimmt, in welchem sie im *Complément des Élémens de Géométrie* genommen ist *).

*) Wenn sich längs einer krummen Linie, sei es einer geschlossenen oder nicht geschlossenen, eine auf ihrer Ebene senkrechte Gerade parallel zu sich selbst bewegt, so beschreibt sie eine cylindrische Fläche, deren charakteristische Eigenschaft ist, daß alle der Curve parallel gelegte Schnitte ihr gleich sind. Man erhält auf diese Weise elliptisch-cylindrische, parabolisch-cylindrische u. s. w. Flächen. Ist die Curve ein Kreis, so ist die Fläche im eigentlichen Verstande eine cylindrische. Eine konische Fläche entsteht, wenn die erzeugende gerade Linie während ihrer Bewegung immer durch einen festen Punkt geht. Bei dieser Gelegenheit verdienen noch die Gleichungen für die Flächen entwickelt zu werden, die durch Umdrehung einer Curve des zweiten Grades um ihre Axe entstehen, und im Allgemeinen konoidische genannt werden. Es sei AK, *Fig.* 79, die Ebene der x, y, AB die Axe der x, A der Anfangspunkt der Coordinaten, CD die auf AK senkrecht stehende Axe der z und zugleich die Axe der Curve DF, M irgend ein Punkt der konoidischen Fläche, $MN = z$, $NP = y$, $AP = x$,

Von den Curven im Raum betrachtet.

§. 193.

Wenn man die Curven im Raum betrachtet, so entstehen sie immer aus dem Durchschnitt zweier Flächen, so wie die gerade Linie aus dem Durchschnitt zweier Ebenen (§. 178). Man kann z. B. einen Kreis dadurch bezeichnen, daß man die Kugel angiebt, von welcher er einen Theil ausmacht, und die Ebene, von der sie geschnitten wird. Nimmt man an, der Mittelpunkt der Kugel befinde sich im Anfangspunkt der Coordinaten, so wird das System der Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (1)$$
$$Ax + By + Cz = D \quad (2)$$

$AE = \alpha$, $CE = \beta$, also $CG = x - \alpha$ und $NG = y - \beta$. Man hat mithin $\overline{CN}^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$. Ist nun DF zuerst ein Bogen einer Ellipse, DC die Richtung ihrer großen Axe und O der Mittelpunkt, so hat man, wenn CO mit γ bezeichnet wird, $\overline{QM}^2 = \frac{b^2}{a^2}.(a^2 - \overline{OQ}^2) = \frac{b^2}{a^2}[a^2 - (z - \gamma)^2]$. Da nun $\overline{QM}^2 = \overline{CN}^2$, so ist $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}(z - \gamma)^2$. Hieraus folgt

$$a^2 [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] + b^2 (z - \gamma)^2 = a^2 b^2.$$

Dies ist die Gleichung der elliptisch-konoidischen Fläche. Ist DC die Richtung der kleinen Axe, so muß man die Buchstaben a und b mit einander vertauschen. Macht man $a = b$, so erhält man

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = a^2,$$

die schon in §. 184 vorgekommene Gleichung der Kugel für den Halbmesser a. Ist DF ein Bogen einer Hyperbel, DC die Richtung ihrer Zwerchaxe, O′ ihr Mittelpunkt und $O'C = \gamma$, so ist $\overline{QM}^2 = \overline{CN}^2 = \frac{b^2}{a^2}(\overline{O'Q}^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2}[(\gamma - z)^2 - a^2]$ mithin

$$b^2 (z - \gamma)^2 - a^2 [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] = a^2 b^2,$$

die Gleichung der hyperbolisch-konoidischen Fläche. Ist endlich DF ein Bogen einer Parabel und $DC = \gamma$, so hat man $\overline{QM}^2 = \overline{CN}^2 = p(\gamma - z)$, mithin

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + pz = p\gamma,$$

die Gleichung der parabolisch-konoidischen Fläche. Uebers.

dem Kreise angehören, in welchem die Kugel und die vorgelegte Ebene einander schneiden, weil dieses System nur den Punkten zukommen kann, welche zugleich in beiden Flächen liegen.

Es ist offenbar, daß man das System der Gleichungen (1) und (2) in eine unzählige Menge anderer von gleicher Bedeutung umwandeln kann. Gewöhnlich eliminirt man aber nach einander eine jede der unbestimmten x, y und z, und erhält so drei Gleichungen mit je zwei derselben, welche den Projectionen der gesuchten Curve auf jede der coordinirten Ebenen angehören.

In obigem Beispiel hat man

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{D - Ax - By}{C}\right)^2 = r^2,$$

$$x^2 + z^2 + \left(\frac{D - Ax - Cz}{B}\right)^2 = r^2,$$

$$y^2 + z^2 + \left(\frac{D - By - Cz}{A}\right)^2 = r^2.$$

Jede dieser zwei Gleichungen giebt die dritte; sie gehören (§. 128) zu Ellipsen, welche die Projectionen des Kreises auf jede der coordinirten Ebenen sind (*Compl.* §. 63) *).

Um klar einzusehen, auf welche Art eine Curve durch die Gleichungen ihrer Projectionen dargestellt ist, muß man erwä-

---

*) Man begreift leicht, daß die Projection eines Kreises auf eine Ebene, gegen die er schief gerichtet ist, eine Ellipse geben müsse; denn nimmt man den Durchmesser, welcher der Ebene parallel läuft, zur Abscissenaxe, so verkürzen sich alle senkrechte Ordinaten in der Projektion nach dem Verhältniß des Halbmessers zum Cosinus des Neigungswinkels, so daß, wenn dieser Winkel mit α und der Halbmesser mit r bezeichnet wird, die Gleichung

$$y = \frac{\cos \alpha}{r} \sqrt{r^2 - x^2}$$

die Ordinaten der Projection giebt. Dies ist aber die Gleichung der Ellipse, und man sieht, daß ihre große Axe dem Durchmesser des Kreises, die kleine aber dem nach dem Verhältniß $r : \cos \alpha$ verkürzten Durchmesser gleich ist. Je größer α ist, desto kleiner ist $\frac{\cos \alpha}{r}$, desto mehr schließt sich also die Ellipse. Ist $\alpha = R$, so wird die Projection zur geraden Linie, und ist $\alpha = o$, mithin $\cos \alpha = r$, so bleibt sie ein Kreis. Uebers.

gen, daß diese Gleichungen cylindrischen Flächen angehören, die auf den Projektionen senkrecht stehen (§. 192), eben so wie die Gleichungen der Projectionen einer Geraden zugleich die der projicirenden Ebenen sind (§. 178).

Hieraus folgt, daß die vorgelegte Curve der Durchschnitt der cylindrischen Flächen ist, welche über zwei ihrer Projectionen senkrecht errichtet sind. (*Compl.* §. 77).

§. 194.

In den meisten Fällen liegen die Punkte des Durchschnitts zweier krummen Flächen nicht alle in einer einzigen Ebene, und der Durchschnitt bildet dann eine **Curve von doppelter Krümmung** *). Von dieser Art ist z. B. der Durchschnitt eines geraden Cylinders und einer Kugel, wenn die Axe des Cylinders nicht durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

Nimmt man an, daß der Mittelpunkt der Kugel sich im Anfangspunkt der Coordinaten befindet, daß die Axe des Cylinders der Axe der z parallel läuft, und daß seine Grundfläche auf der Ebene der x, y ein Kreis ist, der durch den Anfangspunkt geht und zum Durchmesser die Axe der x hat, so werden die Gleichungen der Flächen, welche die vorgelegte Curve enthalten,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$
$$2ax - x^2 = y^2$$

sein, und man wird für die Projectionen in x, y und in x, z haben

$$2ax - x^2 = y^2,$$
$$2ax + z^2 = r^2.$$

Da sich der Mittelpunkt der Kugel auf der cylindrischen Fläche befindet, so kann man die vorliegende Curve beschreiben,

---

*) Eigentlich versteht man unter einer krummen Linie von doppelter Krümmung eine solche, von der kein Theil, so klein er auch sein mag, in einerlei Ebene liegt. Uebers.

indem man die eine Spitze des Cirkels auf dieser Fläche einsetzt, und die andere auf derselben mit einer dem Halbmesser der Kugel gleichen Oeffnung hingleiten läßt. *(Compl.* §. 77.).

Um so viele Punkte dieser Curve, als man nur will, zu finden, muß man die Coordinaten y und z vermittelst der Abscisse x durch die Gleichungen der Projectionen bestimmen, welche geben

$$y = \sqrt{2ax - x^2},\quad z = \sqrt{r^2 - 2ax}.$$

Man sieht, wie weit sich die Curve erstreckt, wenn man untersucht, in welchem Fall diese Coordinaten imaginär werden; man findet nur reelle Werthe für y von $x = o$ bis $x = 2a$, und für z von $x = o$ bis $x = \frac{r^2}{2a}$ auf der positiven und von $x = o$ bis ins Unendliche auf der negativen Seite. Es ist aber offenbar, daß man nur den Theil der Abscisse x nehmen darf, welcher beiden Projectionen gemein ist, weil die Curve ihre Gränze erreicht hat, sobald die eine Coordinate imaginär wird; sie wird sich also nur von $x = o$ so weit erstrecken, bis x der kleinsten der beiden Größen $2a$ und $\frac{r^2}{2a}$ gleich wird.

Die Betrachtung der Projectionen selbst bestätigt dieses Resultat. Da die Gleichung in x, y zum Kreise AE′F′e′, *Fig.* 66, welcher dem Cylinder zur Grundfläche dient, und die, welche x und z enthält, zur Parabel H″I′h″ gehört, deren Parameter $= 2a$ ist und deren Scheitel um $AI' = \frac{r^2}{2a}$ von A entfernt liegt, so kann man offenbar zur Beschreibung der vorgelegten Curve nur die Theile E′Ae′ und H″I′h″ ihrer Projectionen anwenden, welche dem Theil AI′ der Axe AB correspondiren.

§. 195.

Um sich endlich analytisch zu versichern, daß die vorgelegte Curve nicht in einer Ebene liegt, muß man untersuchen, ob sie

nicht der Durchschnitt eines der über ihren Projectionen errichteten Cylinder von einer Ebene sein kann.

Bezeichnet man die Gleichung irgend einer Ebene durch

$$Ax + By + Cz = D,$$

so wird ihr Durchschnitt mit dem über der Parabel H″I′h″ errichteten Cylinder durch die Gleichungen

$$Ax + By + Cz = D,$$
$$2ax + z^2 = r^2$$

dargestellt sein. Die Projection dieses Durchschnitts wird auf der Ebene der y, z zur Gleichung haben

$$A\left(\frac{r^2 - z^2}{2a}\right) + By + Cz = D,$$

und in allen ihren Punkten mit der Projection der vorgelegten Curve auf die Ebene der y, z zusammenfallen müssen, deren Gleichung ist

$$y^2 = r^2 - z^2 - \left(\frac{r^2 - z^2}{2a}\right)^2.$$

Aus der vorhergehenden zieht man

$$y = \frac{2aD - Ar^2 - 2aCz + Az^2}{2aB};$$

man muß also für alle Werthe von z haben

$$\left(\frac{2aD - Ar^2 - 2aCz + Az^2}{2aB}\right)^2 = r^2 - z^2 - \frac{(r^2 - z^2)^2}{4a^2}.$$

Entwickelt man dies Resultat, so kann man es auf die Form

$$Pz^4 + Qz^3 + Rz^2 + Sz + T = o$$

bringen, wo die Buchstaben P, Q, R, S und T Coefficienten bezeichnen, die aus den Größen A, B, C, D gebildet sind. Damit sich diese Gleichung unabhängig von z verificire, so muß man einzeln haben

$$P = o,\ Q = o,\ R = o,\ S = o,\ T = o.$$

Um diesen Gleichungen zu genügen, kann man nur drei der erforderlichen Gleichungen der schneidenden Ebene willkürlich annehmen (§. 176). Wenn man die Rechnung anstellt, findet man

$P = A^2 + B^2,$

$Q = -4a\,AC,$

$R = 4a^2C^2 + 4aAD - 2r^2A^2 + (4a^2 - 2r^2)\,B^2,$

$S = (4ar^2A - 8a^2D)\,C,$

$T = 4a^2D^2 - 4ar^2AD + r^4A^2 - (4a^2r^2 - r^4)\,B^2,$

und man sieht, daß P nicht verschwinden kann, wenn nicht A = o und B = o ist, in welchem Fall auch Q verschwindet; aber es bleibt

$$R = 4a^2C^2,\ S = -8a^2DC,\ T = 4a^2D^2,$$

welche nicht alle Null werden können, weil es unmöglich ist, daß C zugleich mit A und B Null wird. Es giebt also keine Ebene, welche die vorgelegte Curve enthalten kann; und wenn man z durch obige Gleichung bestimmen wollte, so würde man höchstens vier Werthe erhalten, so daß die vorgelegte Curve von einer Ebene nicht in mehr als vier Punkten geschnitten werden kann.

Nachträgliche Anmerkungen.

Anmerkung A zu S. 10.

Im eilften Bande der *Annales de Mathématiques pures et appliquées* S. 323 hat Herr Gergonne folgendes von Herrn Sarrus gegebene Verfahren mitgetheilt, fast ohne Construction zu den Ausdrücken für $\sin(a \pm b)$ und $\cos(a \pm b)$ zu gelangen, welche zugleich mit der Relation $\sin a^2 + \cos a^2 = R^2$ (§. 10) die Grundlage der ganzen Theorie der trigonometrischen Linien ausmachen.

Es seien $AM = a$ und $AN = b$, *Fig.* 80, irgend zwei Bogen. Man ziehe die Sehne des Bogens $NOM = a - b$, und wird dann in dem bei G rechtwinkligen Dreieck NMG haben

$\overline{NM}^2 = \overline{NG}^2 + \overline{MG}^2 = (CQ - CP)^2 + (PM - QN)^2$,

was auch so geschrieben werden kann

$$[\text{Ch.}\ (a-b)]^2 = (\cos b - \cos a)^2 + (\sin a - \sin b)^2 \ldots\ldots (A).$$

Setzt man den Halbmesser der Einheit gleich, so hat man

$$\sin a^2 + \cos a^2 = 1,\ \sin b^2 + \cos b^2 = 1,$$

und entwickelt man nun die zweite Hälfte von (A), so erhält man

$$[\text{Ch.}\ (a - b)]^2 = 2 - 2 \cos a \cos b - 2 \sin a \sin b.$$

Man macht $b = 0$, so entsteht

$$(\text{Ch.}\ a)^2 = 2 - 2 \cos a,$$

eine Formel, welche auf jeden Bogen paßt. Man hat mithin auch

$$[\text{Ch.} (a - b)]^2 = 2 - 2 \cos (a - b).$$

Setzt man die beiden Ausdrücke für $[\text{Ch.} (a - b)]^2$ einander gleich, dividirt durch 2 und ändert die Zeichen, so erhält man

$$\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \ldots (I).$$

Aendert man b in a — b, so hat man die Gleichung

$$\cos b = \cos a \cos (a - b) + \sin a \sin (a - b),$$

und substituirt man für $\cos (a - b)$ seinen Werth aus (I), so entsteht

$$\cos b = \cos a^2 \cos b + \cos a \sin a \sin b + \sin a \sin (a - b).$$

Setzt man hier für $\cos a^2$ seinen Werth $1 - \sin a^2$, so erhält man nach gehöriger Reduction

$$\sin (a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \ldots (II).$$

Aendert man endlich in den Gleichungen (I) und (II) a in a + b, so erhält man die folgenden:

$$\cos a = \cos (a + b) \cos b + \sin (a + b) \sin b,$$
$$\sin a = \sin (a + b) \cos b - \sin b \cos (a + b),$$

welche durch Elimination nach einander die Werthe von $\cos (a + b)$ und $\sin (a + b)$ geben, wie sie in §. 11 entwickelt worden sind.

Wenn die Punkte M und N nicht auf dieselbe Seite des Durchmessers BB′ fallen, so ändert ein Cosinus sein Zeichen, ein Sinus hingegen, wenn der eine über, der andere unter dem Durchmesser AA′ liegt. Vollführt man in diesen verschiedenen Fällen die Rechnung, was gar keine Schwierigkeit hat, so sieht man, daß sich die Formeln so modificiren, wie es die in §. 22 und 23 angestellten Betrachtungen mit sich bringen.

Anmerkung B zu S. 49.

Statt den Ausdruck für $\sin \frac{1}{2} C$ zu suchen, könnte man sogleich den für $\sin C$ finden; denn man hat

sin

$$\sin C^2 = 1 - \cos C^2 = 1 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}$$

$$= \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2b^2}$$

$$= \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2b^2}$$

$$= \frac{[(a + b)^2 - c^2][c^2 - (a - b)^2]}{4a^2b^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4a^2b^2}$$

$$= \frac{4\frac{(a+b+c)}{2}\frac{(a+b-c)}{2}\frac{(c+a-b)}{2}\frac{(c-a+b)}{2}}{a^2b^2},$$

woraus, wenn man $(a + b + c) = s$ setzt, entsteht

$$\sin C = \frac{2\sqrt{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s - a)(\frac{1}{2}s - b)(\frac{1}{2}s - c)}}{ab}.$$

Da diese Formel vier Faktoren unter dem Wurzelzeichen enthält, so ist sie minder einfach, als die im Text gegebene; überdies hat sie das Unbequeme, daß sie nicht zu erkennen giebt, ob der gesuchte Winkel spitz oder stumpf ist, weil der Sinus eines Winkels allemal mit dem seines Supplements übereinkommt (§. 22), dahingegen die Hälfte des stumpfen Winkels nothwendig kleiner als 1' ist, man also ohne Zweideutigkeit den Werth des Winkels $\frac{1}{2}$ C durch den seines Sinus erhält.

Man überzeugt sich leicht, daß es nur einen Fall giebt, wo ein geradliniges Dreieck durch drei seiner Stücke, ungeachtet sich darunter eine Seite befindet, nicht vollkommen bestimmt ist, nämlich den, wo man zwei Seiten und den der einen gegenüber liegenden Winkel kennt, z. B. die Seiten a und c und den Winkel A, *Fig.* 14; denn da alsdann die Proportion $a : c = \sin A : \sin C$ (§. 34) nicht zu erkennen giebt, ob der Winkel C spitz oder stumpf ist, so passen die gegebenen Stücke auf zwei Dreiecke, die sich dadurch unterscheiden, daß die von der Spitze B auf die Seite b gefällte Senkrechte bei dem einen innerhalb, bei dem andern außerhalb zu liegen kommt (*Élémens de Géom.* 35).

Die mathematische Genauigkeit der Formeln allein ist noch nicht hinreichend, wenn es auf ihre Anwendung ankommt; man muß noch die Bequemlichkeit der Rechnung und die Schärfe der numerischen Resultate berücksichtigen.

In der ersten Beziehung müssen, wie ich schon in §. 30 und 37 bemerkt habe, die Ausdrücke für die gesuchten Größen so viel als möglich durch Multiplication und Division zusammengesetzt sein, um die Logarithmen leicht in Anwendung bringen zu können. Indessen hat Gauß in v. Zach's monatlicher Correspondenz Th. 26, S. 498 Mittel zum Ersatz dieser Bedingung nachgewiesen, und Mathiessen 1817 zu Altona eine Tafel herausgegeben, mit deren Hülfe man leicht den Logarithmen der Summe oder der Differenz zweier Größen berechnen kann, die bloß durch ihre Logarithmen gegeben sind.

Was die Genauigkeit des numerischen Calculs betrifft, so muß die gesuchte Größe in ihrem jedesmaligen Zustande der größtmöglichen Variationen fähig sein. Wenn z. B. von einem Sinus die Rede wäre, so müßte er nicht einem dem Quadranten sehr nahe liegenden Bogen angehören; denn da in dieser Lage die Sinus weit weniger als die Bogen wachsen, so wird ein Fehler von einigen Einheiten im Logarithmen des Sinus, welcher durch Combination anderer in ihrer Endziffer oft fehlerhaften Logarithmen entstanden ist, einen viel größern Fehler im Bogen zur Folge haben. Wenn man also einen Sinus zur Bestimmung eines Winkels anwenden soll, so muß dieser Winkel nicht allzu groß sein, und auch von dieser Seite hat der Ausdruck für $\sin \frac{1}{2} C$ (§. 38) häufig Vorzüge vor dem für $\sin C$.

Eine gleiche Unbequemlichkeit würde sich bei Bestimmung eines sehr kleinen Bogens vermittelst seines Cosinus ergeben. Mit den Tangenten hat es aber eine ganz andere Bewandniß; denn diese wachsen um so schneller, je mehr sich die zugehörigen Bogen dem Quadranten nähern.

Auch mache ich hier noch die Bemerkung, daß die Cosinus und Tangenten, welche ihre Zeichen ändern, so bald der Winkel

stumpf wird (§. 23, 24), vor den Sinus, wenn im Verlaufe der Rechnung die Zeichen nach den Regeln der Algebra combinirt worden sind, den Vorzug haben, daß sie zu erkennen geben, ob der Winkel, den man durch sie bestimmen will, spitz oder stumpf ist, was oft seinen großen Nutzen hat. Man vergleiche §. 57.

Was ich hier gesagt habe, geht nur auf den Gebrauch der trigonometrischen Tafeln. Es verdient aber auch noch bemerkt zu werden, daß man bei der Auswahl und Messung der gegebenen Größen eine besondere Vorsicht anzuwenden hat, weil davon die Genauigkeit der graphischen Constructionen abhängt. Wenn man z. B. einen Punkt vermittelst des Durchschnitts zweier Geraden bestimmen soll, so muß man dahin sehn, daß sie sich nicht unter allzuspitzen oder allzustumpfen Winkeln begegnen, weil dann dieser Durchschnitt, der in der Ausübung allemal eine kleine Fläche ist, um so größer ausfällt, und ein kleiner in der Richtung der Geraden begangener Fehler einen viel größern in dem Orte des Durchschnitts hervorbringt. Wenn man also auf dem Terrain Dreiecke bildet, um die gegenseitige Lage mehrerer Punkte zu bestimmen (§. 40), so müssen die Winkel derselben nicht sehr klein oder sehr groß sein.

Anmerkung C zu S. 67.

Wenn man die Ausdrücke für die Polarcoordinaten (§. 149 und 188), wovon in der Anwendung der Algebra auf die Geometrie Gebrauch gemacht worden ist, als bekannt voraussetzte, so könnte man daraus durch dasselbe Verfahren die Fundamentalgleichungen der ebenen und sphärischen Trigonometrie herleiten.

Dieses Verfahren besteht darin, daß man den Ausdruck für die Entfernung zweier Punkte sucht, indem man sie zuerst in einer Ebene und dann im Raum betrachtet. Es seien zuvörderst M und M′, Fig. 36, diese in der Ebene BAC liegenden Punkte. Wir wollen die Winkel MAB und M′AB mit φ und φ', und die Entfernungen AM und AM′ vom Punkt A, dem Anfangs-

punkt der Coordinaten x und y, x' und y', mit r und r' bezeichnen. Man sieht leicht, daß im Punkt M

$$x = r\ cos\,\varphi,\ y = r\ sin\,\varphi$$

und im Punkt M'

$$x' = r'\ cos\,\varphi',\ \ y' = r'\ sin\,\varphi'$$

mithin

$$\overline{MM'}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$
$$= (r\ cos\,\varphi - r'\ cos\,\varphi')^2 + (r\ sin\,\varphi - r'\ sin\,\varphi')^2$$

ist. Hieraus findet man durch Entwickelung und Reduction, wenn man erwägt, daß $sin\,\varphi^2 + cos\,\varphi^2 = 1$ und $sin\,\varphi'^2 + cos\,\varphi'^2 = 1$ ist,

$$\overline{MM'}^2 = r^2 + r'^2 - 2\,rr'\,(cos\,\varphi\ cos\,\varphi' + sin\,\varphi\ sin\,\varphi')$$
$$= r^2 + r'^2 - 2\,rr'\ cos\,(\varphi - \varphi')\ (\S.\ 11).$$

Bezeichnet man nun MM' mit r'' und den Winkel $\varphi - \varphi'$ oder MAM' mit γ'', so erhält man

$$r''^2 = r^2 + r'^2 - 2\,rr'\ cos\,\gamma''.$$

Dies ist eine der Gleichungen A auf S. 153, indem r die Stelle des dortigen c vertritt.

Wenn die beiden in Rede stehenden Punkte, die ich immer mit M und M' bezeichne, im Raum auf drei rechtwinklige Axen durch die Coordinaten x, y, z, x', y', z' bezogen werden, so hat man

$$\overline{MM'}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\ (\S.\ 184),$$

und man bedient sich hier der Umwandlung des 188sten Paragraphen; aber statt des Winkels, der daselbst θ genannt ist, nimmt man sein Complement, d. h. den Winkel, der von der Axe der z und der durch den Anfangspunkt der Coordinaten gezogenen Geraden eingeschlossen wird, wodurch sich $sin\,\theta$ in $cos\,\theta$ und umgekehrt verwandelt. Bezeichnet man auch hier die Entfernung der beiden Punkte vom Anfangspunkt mit r und r', und ihre gegenseitige Entfernung MM' mit r'', so hat man

$$x = r\ sin\,\theta\ cos\,\varphi,\quad x' = r'\ sin\,\theta'\ cos\,\varphi',$$
$$y = r\ sin\,\theta\ sin\,\varphi,\quad y' = r'\ sin\,\theta'\ sin\,\varphi'$$
$$z = r\ cos\,\theta,\quad z' = r'\ cos\,\theta'.$$

Hieraus entsteht

$$r''^2 = \begin{cases} (r \sin\theta \cos\varphi - r' \sin\theta' \cos\varphi')^2 \\ + (r \sin\theta \sin\varphi - r' \sin\theta' \sin\varphi')^2 \\ + (r \cos\theta - r' \cos\theta')^2 \end{cases}$$

ein Werth, dessen Entwickelung

$$r^2 \left[\sin\theta^2 (\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) + \cos\theta^2\right]$$
$$+ r'^2 \left[\sin\theta'^2 (\cos\varphi'^2 + \sin\varphi'^2) + \cos\theta'^2\right]$$
$$- 2rr' \left[\sin\theta \sin\theta' (\cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi') + \cos\theta \cos\theta'\right]$$

sich auf

$$r''^2 = r^2 + r'^2$$
$$- 2rr' [\sin\theta \sin\theta' (\cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi') + \cos\theta \cos\theta')$$

reducirt.

Dieses Resultat unterscheidet sich von dem, welches sich auf die Ebene bezieht, nur durch den Coefficienten von $2rr'$, in welchem man noch $\cos(\varphi - \varphi')$ statt $\cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi'$ schreiben kann. Vergleicht man dann die beiden Ausdrücke für r''^2, so erhält man für $\cos\gamma''$ oder für den Cosinus des Winkels, den die beiden gegebenen Geraden einschließen, den Ausdruck

$$\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Wenn man sich nun vorstellt, daß SM und SN, *Fig.* 18, diese Geraden sind, daß SS' die Axe der z ist, und daß man aus dem Punkt S als Mittelpunkt mit einem der Einheit gleichen Halbmesser eine Kugel beschreibt, so werden die drei Geraden SS', SM und SN ein sphärisches Dreieck ABC bestimmen, in welchem der Winkel BSC, oder der Bogen BC...γ'', die Winkel ASB und ASC oder die Bogen AB und AC...θ und θ', endlich der Winkel M'S'N', der zwischen den projicirenden Ebenen MSS' und NSS' der Geraden MS und NS liegt, oder der Winkel A des sphärischen Dreiecks ....$\varphi - \varphi'$ ist. Dann erhält man, wenn man noch die drei Seiten des sphärischen Dreiecks auf die gewöhnliche Weise mit a, b, c bezeichnet,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

welches die erste der Gleichungen B in §. 47 ist.

Man kann statt der Winkel θ und φ die Winkel α, β, γ der Gleichungen

$$\frac{x}{z} = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\ \frac{y}{z} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

einführen, indem man erwägt, daß nach der obgedachten Uebereinkunft $\gamma = \theta$, folglich

$$z = r \cos\gamma,\qquad y = r \cos\beta,\qquad x = r \cos\alpha$$

ist. Für eine andere Gerade würde man

$$z' = r' \cos\gamma',\ y' = r' \cos\beta',\ x' = r' \cos\alpha'$$

erhalten, und den Cosinus des Winkels der beiden Geraden so finden, wie er sich S. 302 ergeben hat.

Man muß übrigens die beiden Ausdrücke für r''^2 merken, weil sie bei verschiedeuen wichtigen Anwendungen der Analysis auf Astronomie und Physik in Betracht kommen.

Anmerkung D zu S. 105.

Um sich von dem Princip, das ich im Anfange dieses §en aufgestellt habe, Rechenschaft zu geben, muß man erwägen, was geschehen würde, wenn man die Einheit änderte, auf welche man die bei einer Aufgabe gebrauchten Linien bezieht. Es ist klar, daß, wenn man die Einheit annähme, die das Doppelte, Dreifache u. s. w. der zuerst gesetzten wäre, die Zahlen, welche die Linien ausdrücken, zweimal, dreimal u. s. w. kleiner als zuvor werden würden, und daß sie im Gegentheil zwei- oder dreimal größer werden müßten, wenn die neue Einheit zwei oder dreimal kleiner als die erste wäre. Die Flächenräume und Volumina würden analoge Aenderungen erleiden, welche bei jenen durch das Quadrat und bei diesen durch den Cubus des Verhältnisses der beiden Lineareinheiten bestimmt werden würden.

Dies vorausgesetzt, wollen wir uns, um die Ideen besser zu fixiren, vorstellen, daß in der Aufgabe nur drei bekannte Größen a, b, c vorkommen, und die unbekannte x durch den Bruch $\frac{P}{Q}$ dargestellt wird, wo P und Q ganze Ausdrücke in a, b und

c sind, welche sich durch schickliche Reduktionen allemal erhalten lassen; mit a′, b′, c′, x′ wollen wir die Zahlen bezeichnen, die sich durch die Aenderungen der Einheit in dem Maße der Linien ergeben. Der Ausdruck für die neue Unbekannte wird $x' = \frac{P'}{Q'}$ sein, wo P′ und Q′ eben so aus a′, b′, c′ zusammengesetzt sein werden, wie P und Q aus a, b, c, weil der Voraussetzung nach die zuerst als Einheit genommene Linie nicht zu den gegebenen Größen der Aufgabe gehört, also in dem algebraischen Calcul der Unbekannten nicht vorkommen kann. Wenn das Verhältniß der zweiten Einheit zur ersten n, und x eine Linie ist, so wird man haben

$$a = na', \quad b = nb', \quad c = nc', \quad x = nx';$$

es muß mithin auch $\frac{P}{Q} = n\frac{P'}{Q'}$ sein, was nicht statt finden würde, wenn nicht P und Q homogen in a, b, c wären, und nicht P einen Faktor mehr als Q hätte, weil der Buchstabe n in diese Größen nur zugleich mit den Buchstaben a, b, c kommen kann, und zwar in einer Potenz, deren Exponent von der Anzahl der Dimensionen der einzelnen Glieder abhängt.

Hat man z. B. den Ausdruck $x = \frac{ab}{a+b}$ (§. 66), so wird zuvörderst $x' = \frac{a'b'}{a'+b'}$ sein, und die Aenderung von a und b in na′ und nb′ in dem Ausdruck für x geben

$$\frac{n^2a'b'}{na'+nb'} = n\frac{a'b'}{a'+b'} = nx'.$$

Es ist leicht diese Betrachtungen auf die Ausdrücke einer jeden Linie anzuwenden, die von einer beliebigen Anzahl anderer Linien abhängt. Was die Ausdrücke für die Flächen und körperlichen Räume betrifft, so muß man erwägen, daß man bei den ersten $\frac{P}{Q} = n^2\frac{P'}{Q'}$ und bei den andern $\frac{P}{Q} = n^3\frac{P'}{Q'}$ haben müsse; in jedem Fall aber müssen P und Q homogene Größen sein, damit keine verschiedene Potenzen von n in den verschiede-

nen Gliedern von P und Q erscheinen, wenn man sie aus P′ und Q′ ableitet.

Ich verdanke diese Bemerkung Hrn. Deflers, den ein frühzeitiger Tod der Mathematik entrissen hat, der er sich auf eine ausgezeichnete Weise befliß.

Anmerkung E zu S. 290.

In seinem *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie* (*pag.* 89) hat Hr. Lamé die Gleichung der Ebene unter einer symmetrischen und homogenen Form dargestellt, ohne einen überflüssigen Coefficienten einzuführen; diese Form ist

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Die Größen a, b, c nennt der Verfasser die Parameter der Ebene; sie drücken die Abstände des Anfangspunkts der Coordinaten von den Punkten aus, in denen die Ebene die Axen der x, y und z schneidet.

Man überzeugt sich hiervon leicht, wenn man nach einander je zwei der drei Coordinaten gleich Null setzt (§. 175), wo man dann den Werth der dritten erhält für den Punkt, in welchem die vorgelegte Ebene die Axe, auf der die Coordinate genommen wird, schneidet. Setzt man z. B. $x = 0$ und $y = 0$, so geht die obige Gleichung in $\frac{z}{c} = 1$ über; sie giebt also dann $z = c$. Es ist dies der Abstand AE in der 65sten Figur. Die beiden andern würde man darstellen, wenn man die Geraden G″E und AB, G‴E und AC verlängerte, bis sie zusammenträfen, und man würde so eine Pyramide bilden, deren Spitze in A und deren Grundfläche in der jenseits A verlängerten Ebene G″EG‴ läge.

Vergleicht man die neue Gleichung der Ebene mit der Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

nachdem man dieselbe unter die Form

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1$$

gebracht hat, so ergiebt sich

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C};$$

und so wird man leicht die Ausdrücke im Text in diejenigen verwandeln, welche sich auf die von Hrn. Lamé gebrauchte Form beziehen.

Die gerade Linie wird auf eine analoge Weise durch die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

dargestellt, wo a und b die Abstände des Anfangspunkts der Coordinaten von den Punkten bezeichnen, in denen die Gerade die Axen der x und y schneidet. In der 30sten Figur ist a = Af, b = AD.

Eben dies gilt von den Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (§. 128)},$$

welche der auf ihren Mittelpunkt bezogenen Ellipse und Hyperbel angehören, und im Allgemeinen von den Linien und Flächen, welche in den Gleichungen

$$\frac{x^\alpha}{a^\alpha} + \frac{y^\alpha}{b^\alpha} = 1,$$

$$\frac{x^\alpha}{a^\alpha} + \frac{y^\alpha}{b^\alpha} + \frac{z^\alpha}{c^\alpha} = 1$$

begriffen sind.

Hr. Lamé hat, indem er diese Bemerkung (S. 104—106 seines Werks) macht, erkannt, daß die Gleichung

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = 1$$

die Parabel, und die Gleichung

$$\frac{x^{-1}}{a^{-1}} + \frac{y^{-1}}{b^{-1}} = 1$$

oder

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$$

die Hyperbel ausdrückt.

Die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

bezieht sich auf die Flächen des zweiten Grades, von denen §. 190 geredet worden ist. Man sehe übrigens meinen *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral. Tom. III, pag.* 638 und 646.

Zusatz des Uebersetzers.

Daß die Gleichung

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{y^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = 1$$

der Parabel angehört, erhellet so: man erhebe sie zweimal zum Quadrat, so erhält man

$$a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 - 2a^2by - 2ab^2x + a^2b^2 = 0,$$

und vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen Form

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

der Gleichungen des zweiten Grades, so hat man

$$A = a^2, \quad B = -2ab, \quad C = b^2,$$

mithin

$$4AC - B^2 = 0,$$

und dies ist nach §. 128 die Bedingung, unter welcher eine Gleichung des zweiten Grades die Parabel ausdrückt. Auch sieht man leicht, daß die Gleichung

$$\frac{x^{-1}}{a^{-1}} + \frac{y^{-1}}{b^{-1}} = 1 \text{ oder } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$$

$$\text{oder } xy - ay = bx \text{ oder endlich } y = \frac{bx}{x - a}$$

die Hyperbel zwischen ihren Asymptoten giebt, wenn man sie nach der Analogie des §. 120 vorgekommenen Falls construirt, welcher sich von dem vorliegenden bloß dadurch unterscheidet, daß, da $f = 0$ ist, für $x = 0$ auch $y = 0$ ist, die Curve also durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht.

Berlin, gedruckt bei Petsch.

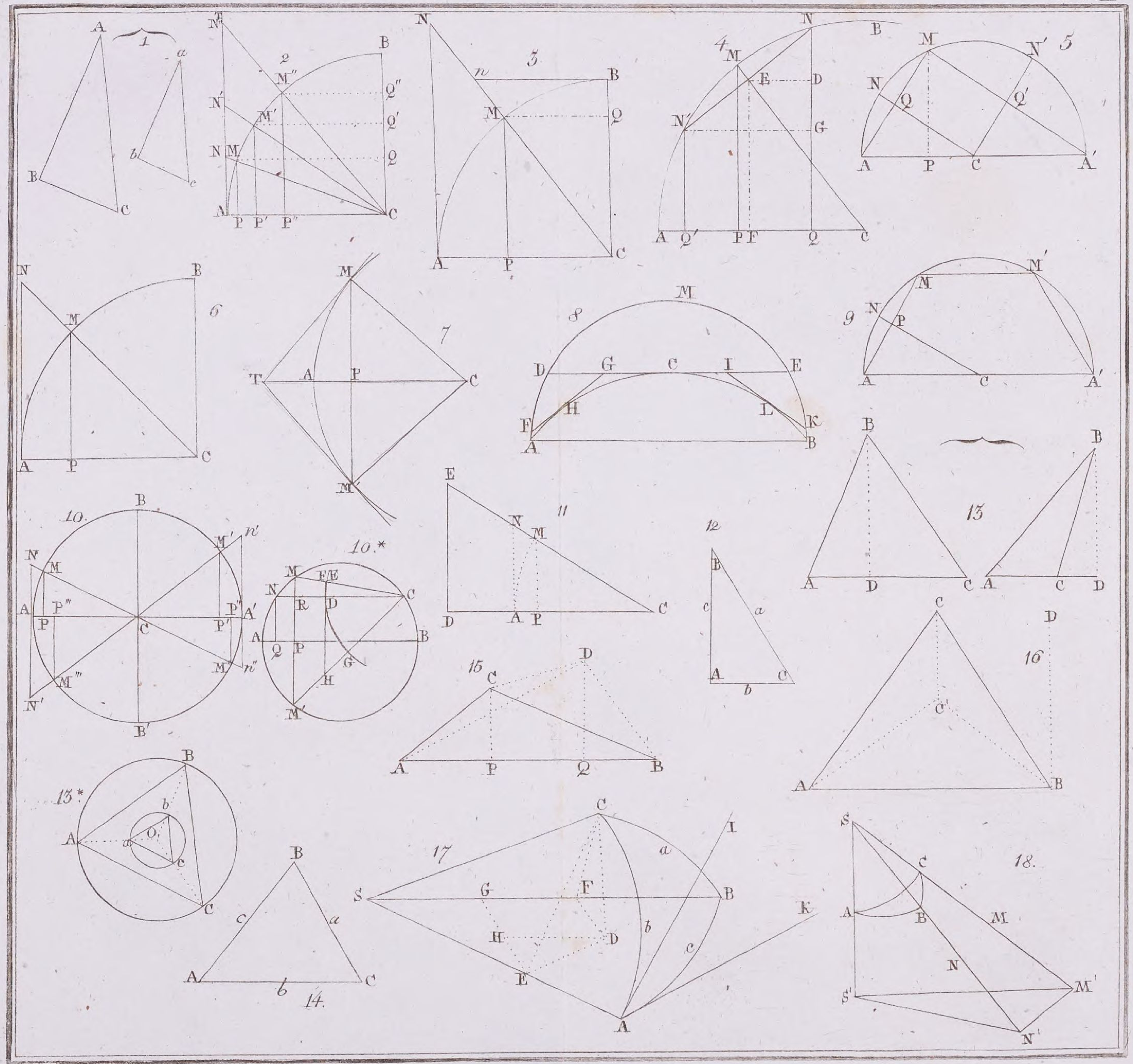
Druckfehler.

S. 11 in der vierten Zeile von §. 12 muß hinter der Formel $\sqrt{R^2 - \sin a^2}$ das Zeichen *) stehen.

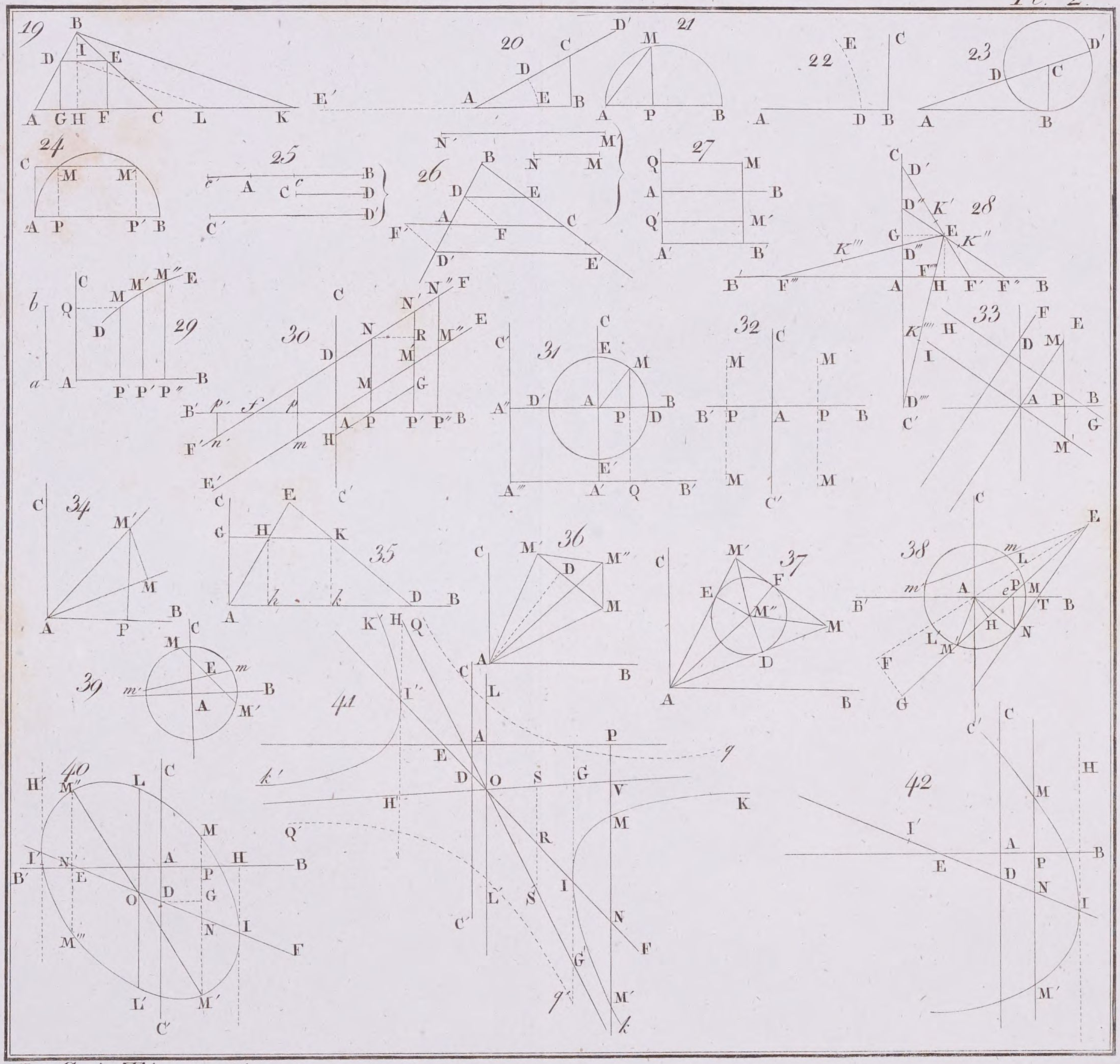
S. 27 in der zweiten Zeile der Anmerkung ist zu lesen: und ihrer jedesmaligen Lage als eine sich aus der Betrachtung der Formeln ergebende Thatsache nachzuweisen.

S. 79 Z. 5 l. zweite Anmerk. stattt erste.

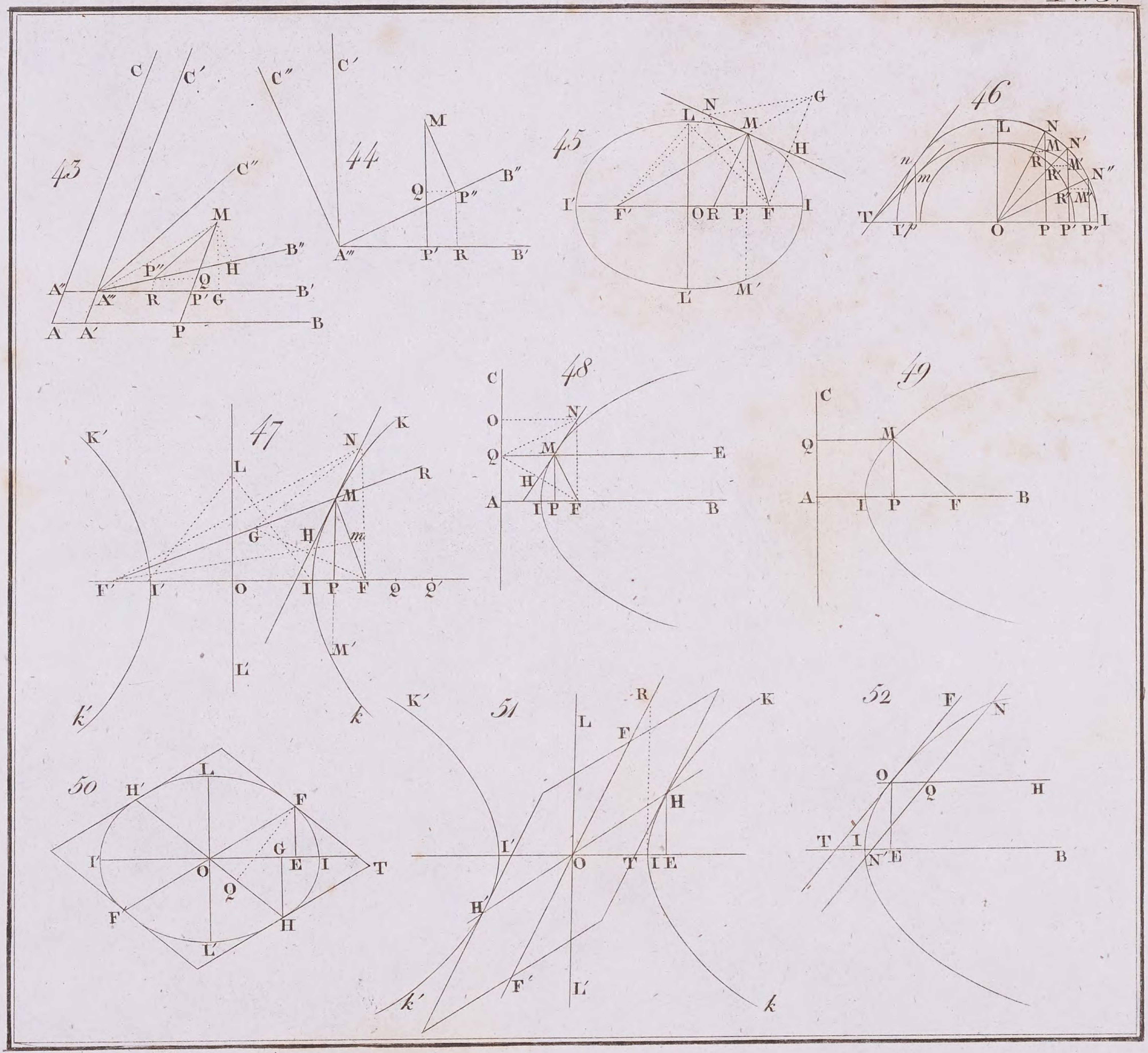
Staatl. Bibliothek Passau



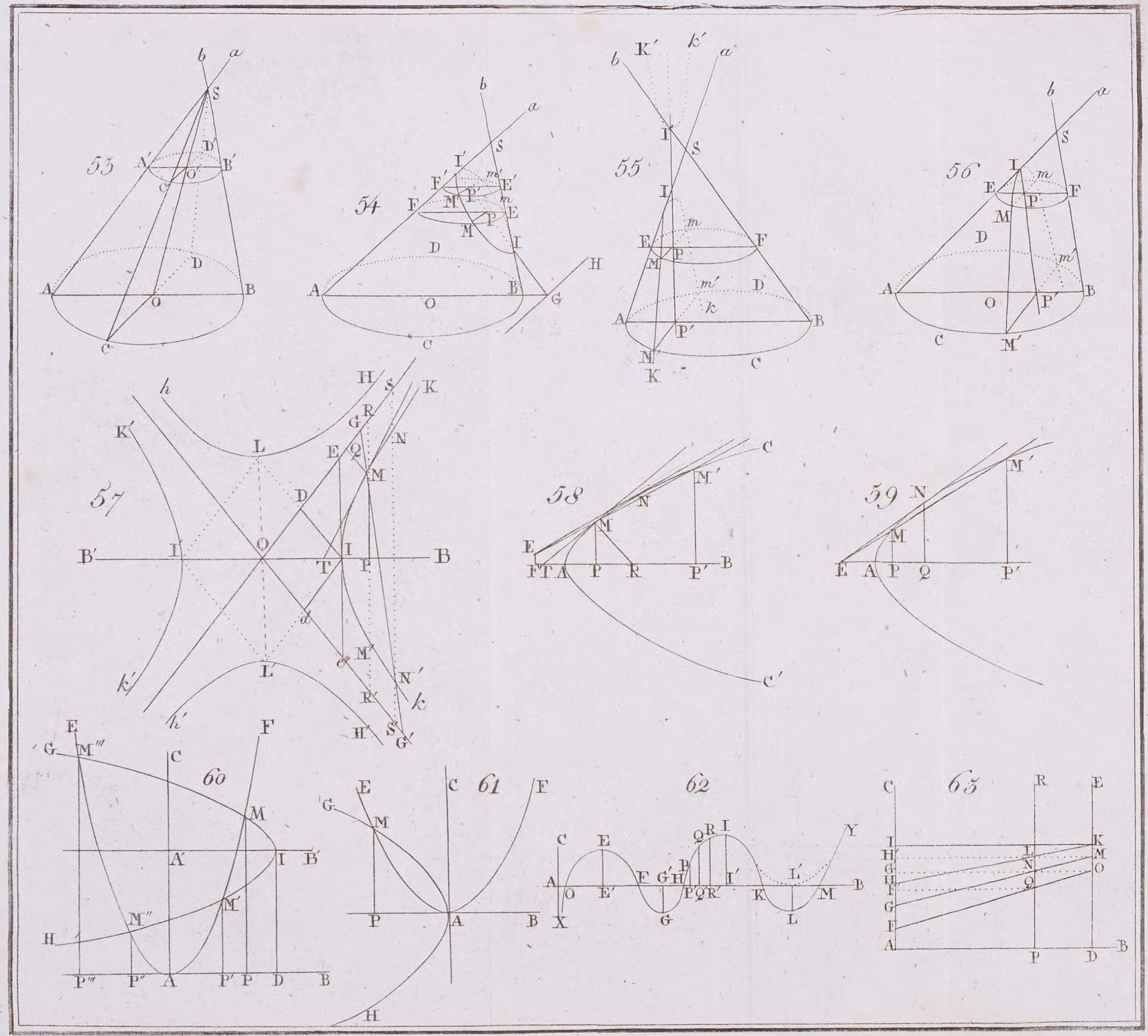
La Croix Trigonometrie. 1837.



La Croix Trigonometrie. 1837.

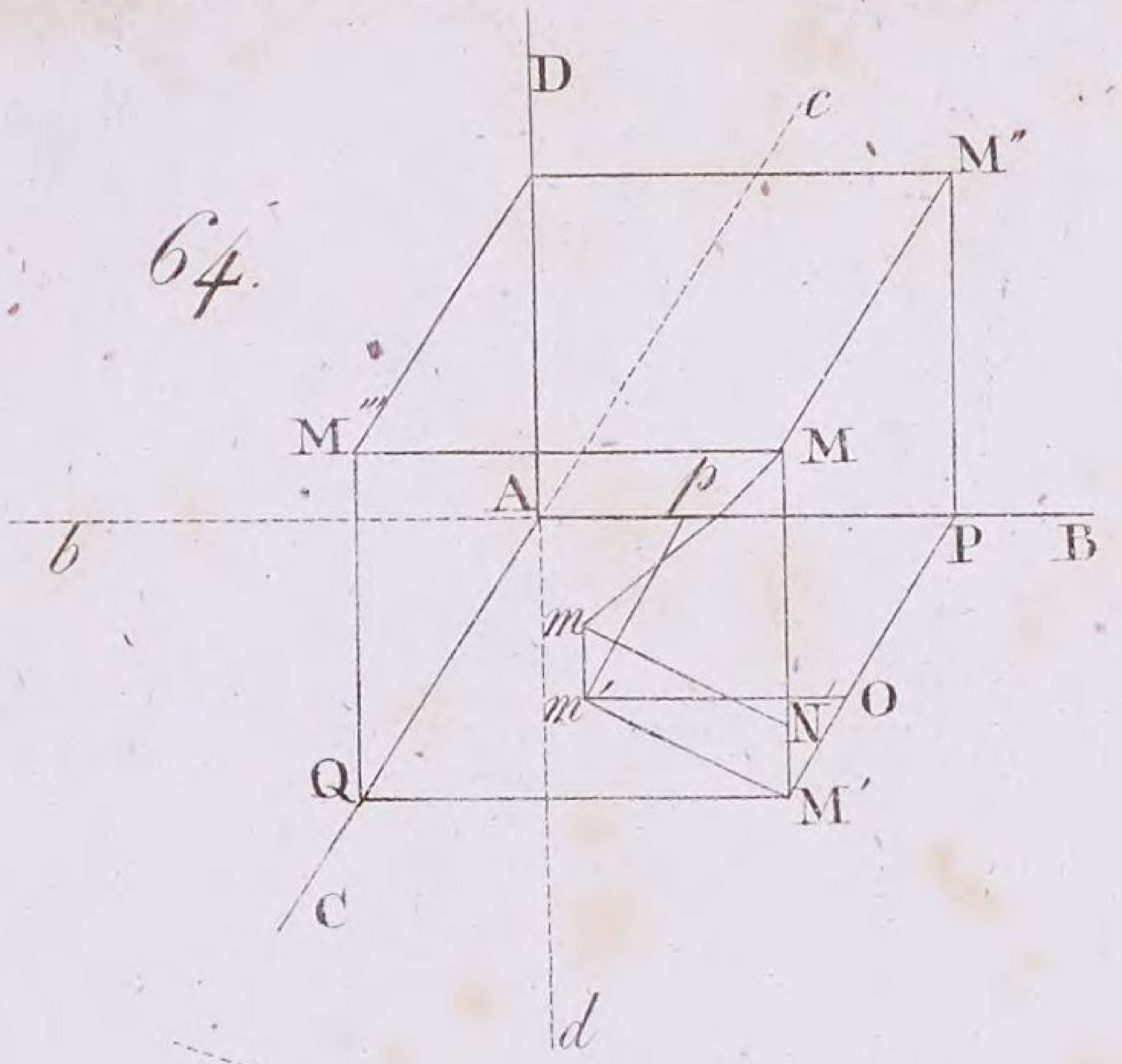


La Croix Trigonometrie. 1837.

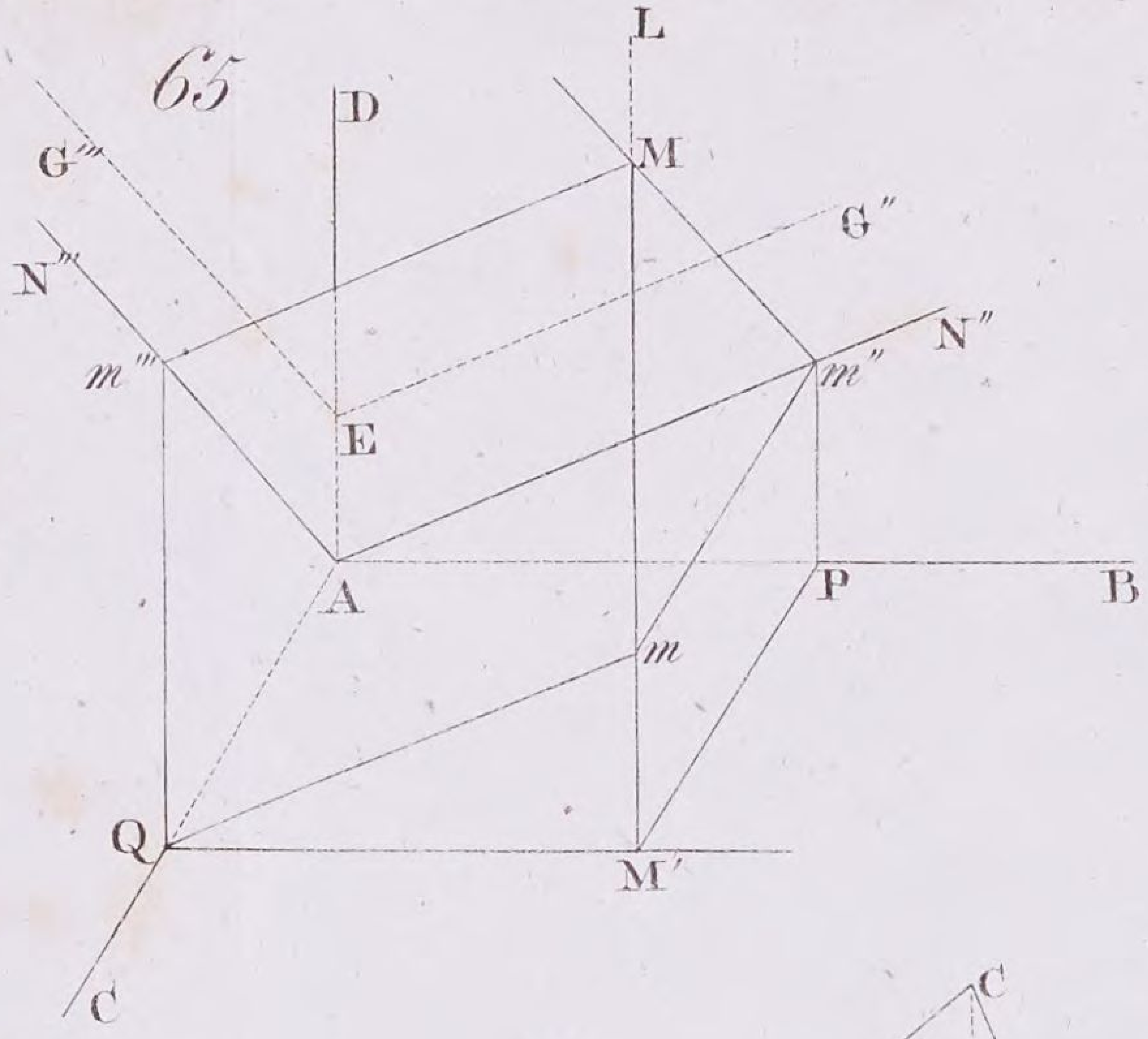


53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63

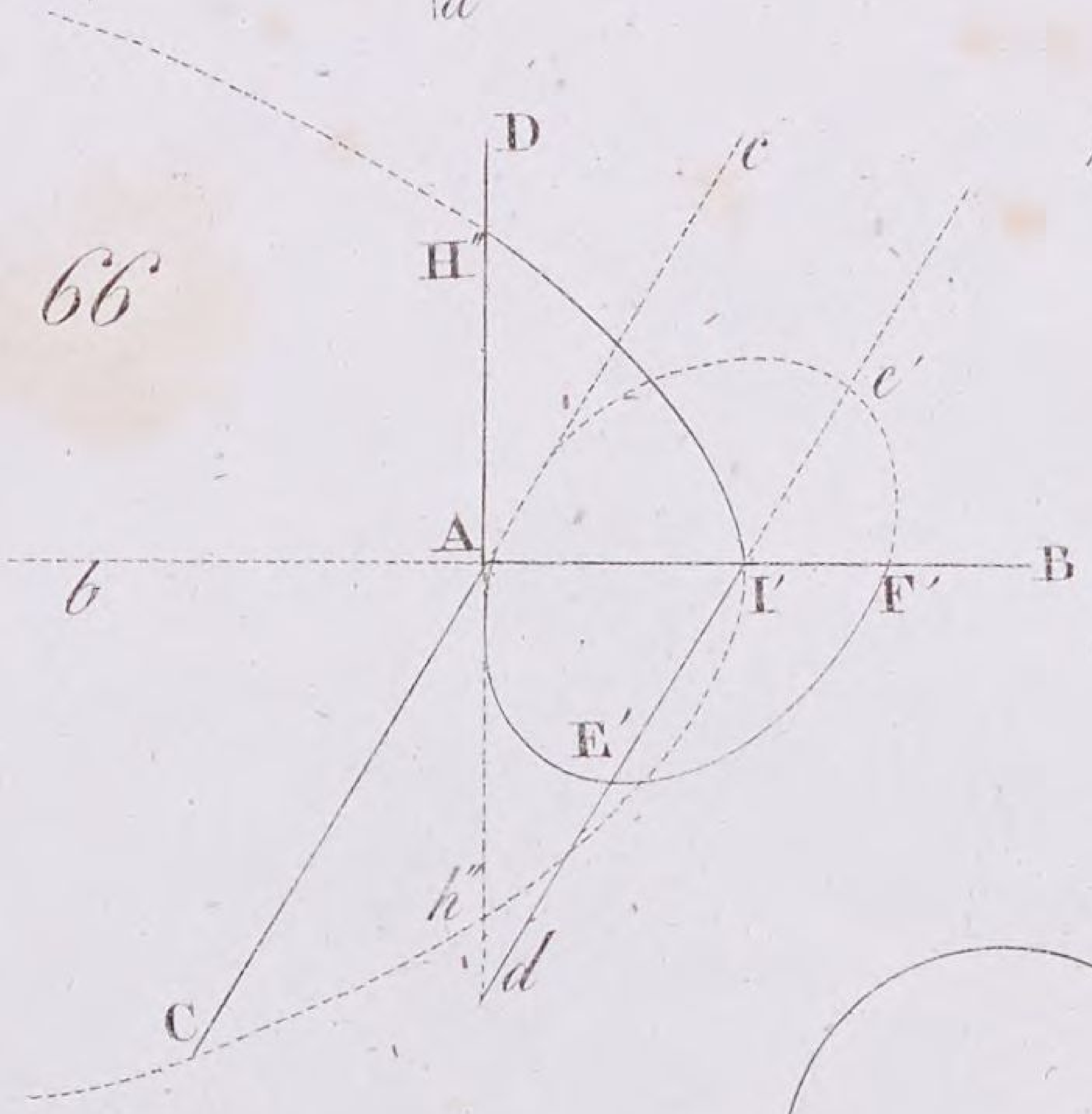
64.



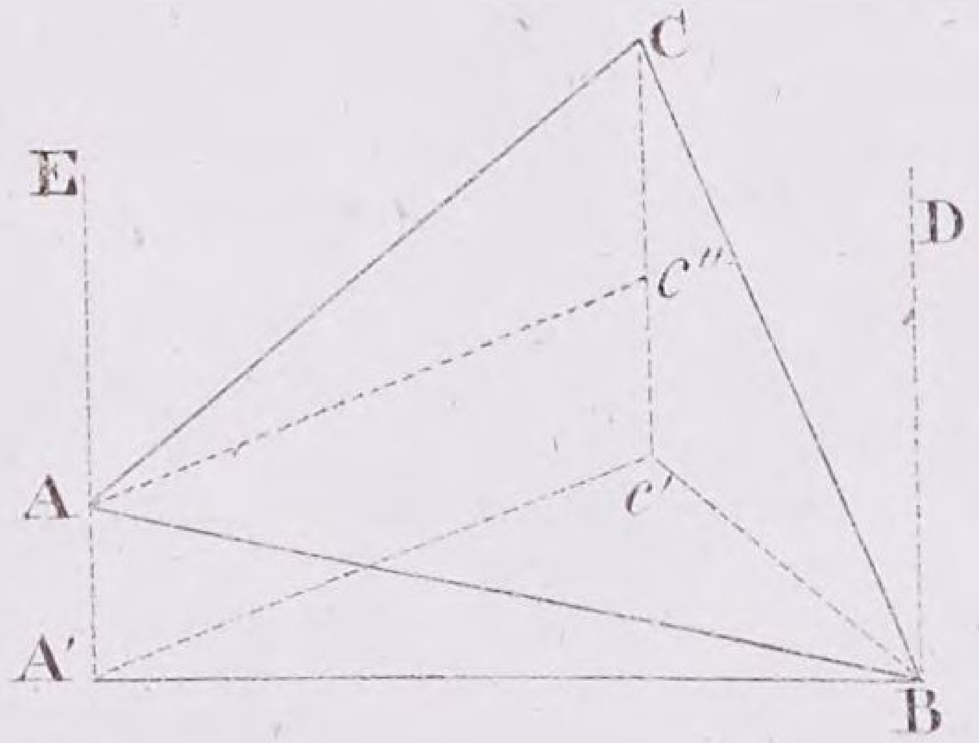
65



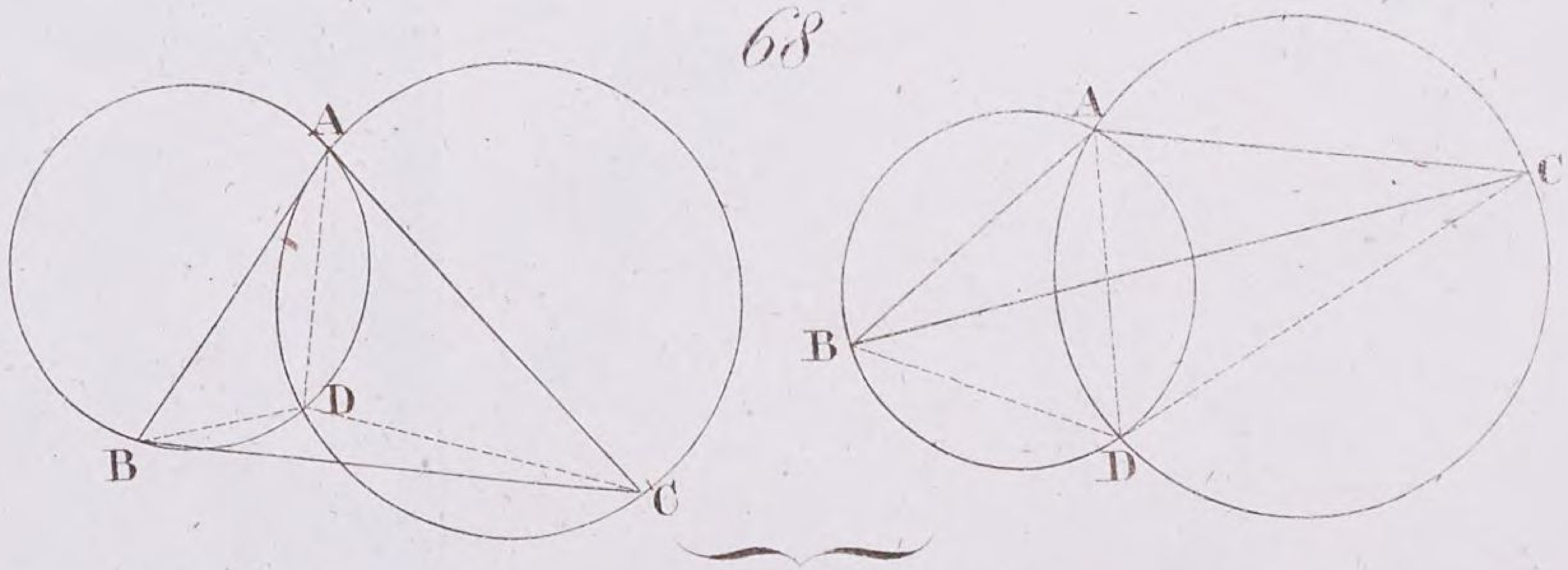
66



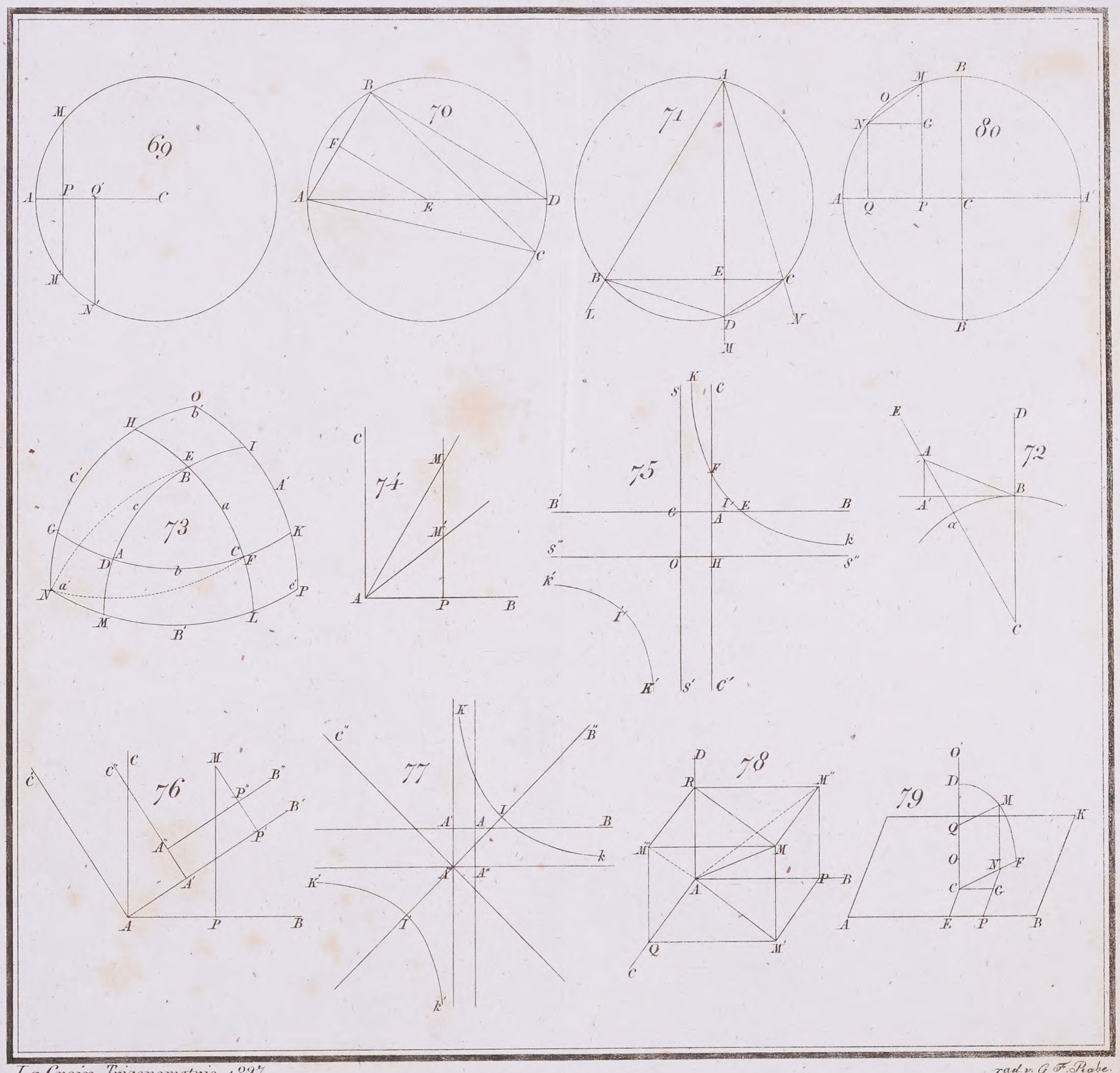
67



68



La Croix Trigonometrie. 1837.



La Croix Trigonometrie 1837.

rad. v. G. F. Robe.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lacroix, S. F.,

Anleitung zur ebenen und sphärischen Trigonometrie und zur Anwendung der Algebra auf die Geometrie

Berlin 1837

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 89(2)
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346082-0